FUNGSI GREEN YANG DIKONSTRUKSI PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR TAK HOMOGEN ORDE-N

Wahidah Alwi
Program Studi Matematika
FST - UINAM
wahidah.alwi79@gmail.com

Wahyuni Abidin
Program Studi Matematika
FST - UINAM

Ratnasari
Mahasiswa Program Studi Matematika
FST-UINAM

Info:

Jurnal MSA Vol. 3 No. 1
Edisi: Januari – Juni 2015
Artikel No.: 4
Halaman: 21 - 28
ISSN: 2355-083X
Prodi Matematika UINAM

ABSTRAK

Persamaan diferensial (*differential equation)* merupakan suatu persamaan yang melibatkan satu atau lebih turunan fungsi yang belum diketahui, dan persamaan itu juga mungkin melibatkan fungsi itu sendiri dan konstan.Dalam penelitian ini membahas sutatu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier tak homogen orde-n. Dikemukakan suatu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier tak homogen orde-n dengan mengkonstruksi fungsi Green yaitu melalui metode Transformasi Laplace.
Mengkonstruksi fungsi Green melalui metode Transformasi Laplace (1) Diberikan persamaan diferensial linier tak homogen. (2) Mencari solusi persamaan diferensial linier tak homogen orde-n dengan menggunakan metode Transformasi Laplace.(3) Menginverskan Transformasi Laplace yang telah didapatkan pada poin (2). (4) Mendapatkan Fungsi Green yaitu:

$$y(t)=\int_0^t g(t-u)f(u)\ du.$$

Kata Kunci: Persamaan Diferensial Biasa, Fungsi Green, Transformasi Laplace

1. PENDAHULUAN

Latar Belakang

Manusia diciptakan Allah Swt di dunia ini adalah sebagai khalifah.Nilai-nilai dan segala ketentuannya yang berasal dari Allah Swt harus ditegakkan dalam kehidupan didunia ini.Untuk menegakkannya, maka manusia dinamakan sebagai khalifa (wakil) Allah Swt dimuka bumi ini untuk menegagkan syariat-syariatnya.Seorang khalifah atau insan biasa jika hidupnya tidak berbekal ilmu pengetahuan baik agama maupun umum, maka akan mudah tersesat. Allah tidak hanya memerintahkan manusia menuntut ilmu agama yang hanya untuk kepentingan akhirat saja, akan tetapi ilmu-ilmu yang sifatnya umum juga sangat dibutuhkan guna keberhasilan di dunia dan akhirat. Ini artinya menuntut ilmu yang sifatnya umum setara dengan menuntut ilmu yang agama.

Terkadang ilmu itu terdapat pada akal pikiran, terkadang pada ucapan, dan terkadang terdapat pada tulisan tangan.Sehingga ada ilmu yang sifatnya akal pikiran, ucapan dan ada yang berupa tulisan.Di dalam tulisan terkadang unsur akal pikiran dan ucapan, tetapi tidak berarti sebaliknya. Karena itu Allah Swt berfirman dalam surah Q.S. Al-Mujadilah ayat 11 yang artinya

> “Hai orang-orang yang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan”.

Ayat ini menerangkan tentang perintah untuk memberi kelapangan dalam segala hal kepada orang lain. Ayat ini juga tidak menyebut secara tegas bahwa Allah SWT akan meninggikan derajat orang yang berilmu. Tetapi menegaskan bahwa mereka memiliki derajat-derajat yakni yang lebih tinggi dari sekadar beriman, tidak disebutkan kata meninggikan itu sebagai isyarat bahwa sebenarnya ilmu yang dimiliki itulah yang berperanan besar dalam ketinggian derajat yang diperolehnya.Yang dimaksud dengan yang diberi pengetahuan adalah mereka yang beriman dan menghiasi diri mereka dengan pengetahuan.Ini berarti ayat di atas membagi kaum beriman jadi dua, yang pertama sekadar beriman dan beramal saleh, yang kedua beriman, beramal saleh serta memiliki pengetahuan. Derajat kedua kelompok ini menjadi lebih tinggi, bukan saja karena nilai ilmu yang disandangnya, tetapi juga amal dan pengajarannya kepada pihak lain baik secara lisan atau tulisan maupun keteladanan.Ilmu yang dimaksud ayat di atas bukan saja ilmu agama. Akan tetapi ilmu apa saja yang bermanfaat.

Dengan keterbatasan manusia dalam menghitung sehingga banyakfenomena dalam kehidupan sehari-hari yang sulit diselesaikan secara langsungsehingga dibutuhkan matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan suatumasalah baik algoritma berfikir dari matematika, cara berhitung, ataupun hanyasebagai simbol-simbol untuk menyederhanakannya. Karena semakin hari semakin canggihnya ilmu pengetahuan dan teknologi yang ada, maka hampir semua masalah tersebut dapatdiselesaikan.Salah satu disiplin yang dari zaman dahulu sampai sekarang yangmasih unggul digunakan di kalangan berbagai disiplin ilmu lainnya adalahmatematika.

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung yang dapat digunakan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan masalah, seperti cara berhitung ataupun hanya sebagai simbol-simbol yang menyederhanakannya. Akan tetapi seringkali juga ditemukan masalah-masalah dalam menyelesaikan model-model matematika.Beberapa model matematika yang ada, salah satunya adalah tentang persamaan diferensial.

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang berkaitan dengan turunan suatu fungsi atau memuat suku-suku dari fungsi tersebut dan turunannya.Dengan melibatkan banyaknya variabel bebas, maka ada dua bentuk persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.Persamaan diferensial biasa yaitu persamaan yang hanya melibatkan satu variabel bebas sedangkan persamaan diferensial parsial yaitu persamaan yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas.Persamaan diferensial yang akan dibahas dalam proposalini adalah persamaan diferensial biasa.

Fungsi Green merupakan suatu metode penyelesaian yang didalam proses menentukan penyelesaian suatu persamaan diferensial. Nilai fungsi green dapat ditentukan dengan menggunakan metode transformasi laplace dan metode variasi parameter. Dalam Jurnal Integral yang berjudul "Mengkonstruksi Fungsi Green Persamaan Difrensial Linier Orde-*n"* dan juga Dalam skripsi yang berjudul "Mendapatkan Fungsi Green yang Dikonstruksi dari Persamaan Linier dalam Bidang Fisika (Studi Kasus: Vibrasi sistem Mekanis") terdapat saran bahwa metode fungsi Green juga dapat diselesaikan dengan persamaan diferensial linier tak homogen menggunakan metode Transformasi Laplace. Metode yang biasa digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial adalah metode Transformasi Laplace.Metode Transformasi Laplace (*Laplace Transformation*) merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial.Metode ini pertama kali diperkenalkan oleh *Pierre Simon Marquas De Laplace* seorang matematikawan Prancis dan seorang guru besar di Paris. Keunggulan Transformasi Laplace adalah bahwa masalah nilai awal persamaan diferensial linier dapat diselesaikan secara langsung tanpa terlebih dahulu menentukan solusi umumnya atau persamaan diferensial tak homogen dapat diselesaikan tanpa terlebih dahulu menyelesaikan persamaan homogennya. Sehingga penulis bermotivasi untuk mencoba menjelaskan dan menyelesaikan kepada pembaca mengenai metode fungsi green untuk persamaan diferensial linier tak homogen dengan menggunakan metode Transformasi Laplace.

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penulis mengambil judul "Mendapatkan Fungsi Green yang Dikonstruksi dariPersamaan Diferensial Linier Tak Homogen Orde-n".

Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana mendapatkan fungsi Green yang dikonstruksi dari persamaan diferensial linier tak homogen orde-n dengan metode Transformasi Laplace?

Batasan Masalah

a. Metode yang digunakan untuk mengkostruksi fungsi green adalah metode Transformasi Laplace.
b. Fungsi Green yang dimaksud adalah fungsi Green khusus pada suatu integral transformasi atau substitusi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier tak homogen

2. TINJAUAN PUSTAKA

Persamaan Diferensial Biasa.

Pesamaan diferensial biasa (*ordinary differential equetion*), disingkat PDB adalah sebuah persamaan diferensial yang melibatkan hanya satu variabel bebas.

Contoh 1

1. $xy' + y = 3$
2. $y''' + 2(y'') + y' = \cos x$

Persamaan DiferensialLinier

Suatu persamaan diferensial dikatakan linier jika tidak ada perkalian antara variabel-variabel tak bebas dan derivatif-derivatifnya. Dengan kata lain, semua koefisiennya adalah fungsi dari variabel-variabel bebas.

Secara umum persamaan diferensial linier orde-*n* dituliskan sebagai:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \qquad (2.1)$$

di mana *f(x)* dan koefisien $a_i(x)$, dengan *i* = 0, 1, 2, ... , *n* tergantung hanya pada variabel *x*. Dengan kata lain, persamaan-persamaan ini tidak tergantung pada *y* ataupun pada turunan dari *y*.

Contoh 2

1. $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 3\,\frac{d^2y}{dx^2}$adalah persamaan diferensial biasa tingkat dua derajat satu.
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$adalah persamaan diferensial biasa tingkat dua derajat dua.

Bentuk umum persamaan diferensial orde dua yaitu :

$$y'' + a\,y' + b\,y = f(x) \qquad (2.2)$$

jika*f(x) = 0* maka persamaan diferensial di atas persamaan diferensial homogen, sedangkan jika *f(x) ≠ 0* maka dinamakan persamaan diferensial tak homogen.

Metode Transformasi Laplace

Transformasi Laplace dapat diterapkan sebagai metode untuk penyelesaian persamaan diferensial, baik sebagai masalah nilai awal maupun masalah nilai batas. Untuk memudahkan proses penyelesaian lagkah demi langka, disediakan table yang memuat Transformasi Laplace dan inversnya. Keunggulan Transformasi Laplace di dalam menyelesaiakan suatu masalah nilai awal secara langsung, artinya bahwa masalah nilai awal dapat diselesaikan tanpa terlebih dahulu harus menentukan solusi umumnya atau persamaan-persamaan tak homogen dapat diselesaikan tanpa terlebih dahulu menyelesaikan persamaan homogennya.

Misalkan *F(t)* suatu fungsi dari *t* yang ditentukan untuk *t > 0*. Maka Transformasi Laplace dari *F(t),* yang dinyatakan oleh $\mathcal{L}\{F(t)\}$, didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad (2.3)$$

Transformasi Laplace dari *F(t)* dikatakan ada apabila integral (3) konvergen untuk beberapa harga *s*, bila tidak demikian maka transformasi Laplace-nya tidak ada.

Contoh 3

Dengan menggunakan definisi, tentukanlah transformasi Laplace, $F(s) = \mathcal{L}\{f\}$, dengan fungsi-fungsi berikut:

$f(t) = e^{at}$, dengan $t \geq 0$ dan a konstanta tak nol

Penyelesaian:

Bila $f(t) = e^{at}$, menurut definisi transformasi Laplace dari e^{at} diberikan oleh:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{at}e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)b} + \frac{1}{s-a}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^{\frac{1}{(s-a)b}} + \frac{1}{s-a}$$

$$= 0 + \frac{1}{s-a} = \frac{1}{s-a}$$

No.	*f (t)*	*F (s)*
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	a	$\frac{a}{s}$
3.	t	$\frac{1}{s^2}$
4.	t^2	$\frac{2!}{s^3}$
5.	e^{at}	$\frac{1}{s+a}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s-a}$
7.	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
9.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
10.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
11.	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

Invers Transformasi Laplace

Jika transformasi Laplece suatu fungsi*f(t)* adalah *F(s)*, yaitu $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka *f(t)*disebut invers transformasi Laplace dari *F(s)* dan ditulis:

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$(2.4) (2.14)

Dengan $\mathcal{L}^{-1}$ dinamakan operator transformasi Laplace invers.

Fungsi invers transformasi Laplace tunggal. Berikut diberikan pada teorema berikut.

Konvolusi

Konvolusi dari dua fungsi adalah yang terkait dengan perkalian dari fungsi-fungsi melalui Transformasi Laplace balik. Diberikan $f(t)$ dan $g(t)$ kontinu pada selang interval terbatas $[0,t]$, konvolusi f^*g dari f dan g adalah

$$f(t)^*g(t) = (f^*g)(t) = \int f(u)f(t-u)du \text{(2.5)}$$

Teorema

Jika $f(t)$ dan $g(t)$ sebagaimana disyaratkan di atas dan diandaikan

$$L\{f(t)^*g(t)\} = F(s)G(s)$$

yang ekivalen dengan

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=f(t)^{*}g(t)$$

Bukti:

Dengan menggunakan transformasi $h(t)=f(t)^{*}g(t),$ diperoleh

$$H(s)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}dt\int_{0}^{t}f(u)g(t-u)du$$

$$=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{t}e^{-su}f(u)\,e^{-s(t-u)}g(t-u)dudt$$

Dengan mengubah turunan pengintegralan dari t dan u pada interval pengintegralan $0\le t<\infty, 0\le u\le t<\infty, 0\le u\le t$ yang ekivalen dengan $0\le u<\infty, u\le t<\infty,$ diperoleh integrasi

$$H(s)=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{su}f(u)\,e^{-s(t-u)}g(t-u)dtdu$$

Dengan menggunakan perubahan peubah $t^{'}=t-u,$

$$H(s)=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{su}f(u)\,e^{-st^{'}}g(t^{'})dt^{'}\,du$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{su}f(u)du\int_{0}^{\infty}e^{-st^{'}}g(t^{'})dt^{'}$$

$$=F(s)G(s)$$

Sifat-sifat dasar (aljabar) dari konvolusi fungsi antara lain:

1. $f^{*}g=g^{*}f$ (Komutatif)
2. $f^{*}(g+h)=f^{*}g+f^{*}h$ (Distributif)
3. $(f^{*}g)^{*}h=f^{*}(g^{*}h)$ (Asosiatif)

$f^{*}0=0^{*}f=0.$

3. METODE PENELITIAN

Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan penulis adalah studi pustaka yaitu penelitian yang bertujuan untuk mengumpulakan data dan informasi mengenai masalah yang akan diteliti dengan cara mengumpulkan beberapa materi-materi yang terdapat di ruang perpustakaan, seperti buku-buku tentang persamaan diferensial, buku-buku tentang kalkulus, jurnal-jurnal dari internet, dan lain-lain.

Sumber Data

Sumber data dalam penelitian ini adalah buku-buku persamaan diferensial, buku-buku kalkulus, dan buku-buku matematika lainnya yang dapat mendukung proses penelitian.

Prosedur Penelitian

Langkah-langkah untuk mengkonstruksi fungsi green pada persamaan diferensial linier tak homogen orde-n dengan menggunakan metode transformasi Laplace adalah sebagai berikut:

a. Diberikan persamaan diferensial linier tak homogen.
b. Mencari solusi persamaan diferensial linier tak homogen orde-n dengan menggunakan metode Transformasi Laplace.
c. Menginverskan Transformasi Laplace yang telah didapatkan pada poin (b)
d. Mendapatkan fungsi Green.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil

1. *Diberikan persamaan diferensial linier tak homogen.*

Bentuk umum persamaan diferensiallinear tak homogen orde n yaitu sebagai berikut :

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_2(x)y^{''}+a_1(x)y^{'}+a_0($$

Solusi umum persamaan diferensial di atas adalah :

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)$$

dimana $y_h(x)$ merupakan solusi umum persamaan diferensial homogennya dan $y_p(x)$ merupakan solusi khususnya atau Transformasi Laplace.

2. *Mencari solusi persamaan diferensial linier tak homogen orde-n dengan menggunakan metode Transformasi Laplace.*

Untuk memperoleh solusi khususnya y_p maka dilakukan Transformasi Laplace terhadap persamaan diferensial, maka harus diingat terlebih dahulu bahwa:

$$\frac{d\ u.v}{dt} = u\frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt}v$$

$$\int u\frac{dv}{dt}dt = u.v - \int \frac{du}{dt}v.dt \qquad (4.2)$$

bila transformasi laplace adalah $Y(s) = L\ \mathrm{y(t)} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} y(t)dt$, maka transformasi laplace dari turunan pertama adalah $L\left(\frac{dy}{dt}\right) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\left(\frac{dy}{dt}\right)dt$. Pada persamaan (4.2) dimisalkan u adalah e^{-st} dan v adalah y, maka

$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\left(\frac{dy}{dt}\right)dt$$

$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left[\left(\mathrm{e}^{-st}y\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -s\mathrm{e}^{-st}y\,dt$$

$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left[\left(\mathrm{e}^{-st}y\right)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}y\,dt \qquad (4.3)$$

Jika diasumsikan bahwa pada saat $t \to \infty$ grafik $y(t)$ mengalami kenaikan cukup lambat dibanding dengan grafik e^{-st} maka $\mathrm{e}^{-st}y(t) \to 0$ untuk $t \to \infty$ sehingga

$$\left[\left(\mathrm{e}^{-st}y\right)\right]_0^\infty = 0 - e^0 y(0) = -y(0)$$

Bentuk persamaan (4.3) dapat disederhanakan menjadi

$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left[\left(\mathrm{e}^{-st}y\right)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}y\,dt$$

$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) = -y(0) + sY(s) \qquad (4.4)$$

Dari persamaan (4.4), maka Transformasi Laplace dari turunan pertama sebuah fungsi adalah:

$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) = sY(s) - y(0)$$

atau

$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) = sL\,y(t) - y(0)$$

Untuk mendapatkan Transformasi Laplace dari turunan kedua sampai pada turunan ke-*n* sebuah fungsi dapat dicari dengan cara yang sama. Untuk turunan kedua:

$$L\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = s^2Y(s) - \frac{dy}{dt}(0) - sy(0) \qquad (4.5)$$

Sampai pada Transformasi Laplace dari turunan ke –*n* suatu fungsi adalah:

$$L\left(\frac{d^ny}{dt^n}\right) = s^nY(s) - \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0) - \ldots - s^{n-2}\frac{dy}{dt}(0) - s^{n-1}y(0) \qquad (4.6)$$

Atau

$$L\left(\frac{d^ny}{dt^n}\right) = s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - \ldots - s^{n-2}\frac{dy}{dt}(0) - s^{n-1}y(0) \qquad (4.7)$$

3. *Menginverskan Transformasi Laplace yang telah didapatkan.*

Dengan menggunakan karakteristik sifat linieritas Transformasi Laplace, Jika Transformasi Laplace dari fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ adalah $F(s)$ dan $G(s)$, dengan

$$F(s) = L\,f(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)dt$$

dan

$$G(s) = L\,g(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}g(t)dt$$

Invers Transformasi Laplace dari $F(s)$ dan $G(s)$ adalah $f(t)$ dan $g(t)$ dengan $L^{-1}F(s) = f(t)$ dan $L^{-1}G(s) = g(t)$.

Maka:

$$L^{-1}F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)$$

Dan

$$L^{-1}G(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)$$

4. *Mendapatkan solusi khususnya yaitu fungsi Green*

Dengan teorema konvolusi sehingga di dapatkan:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(u)du \int_0^\infty e^{-xy} g(y)dy$$

$$= \int_0^\infty f(u)\left(\int_0^\infty e^{-s(x+y)} g(y)dy\right)du$$

$$= \int_0^\infty f(u)\left(\int_0^\infty e^{-st} g(t-u)dt\right)du$$

$$= \int_0^\infty f(u)\left(\int_s^t f(u)g(t-u)du\right)dt$$

$$= \left[\int_0^t f(u)g(t-u)du\right]$$

Maka didapatkan fungsi Green adalah:

$$y_p = \int_0^t f(u)g(t-u)du \qquad (4.8)$$

5. PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan uraian dari BAB IV dapat disimpulkan bahwa untuk mendapatkan fungsi Green pada persamaan diferensial linier tak homogen orde-n melalui metode Transformasi Laplace adalah sebagai berikut:

$$y(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

Saran

Fungsi Green yang dibahas pada tugas akhir ini hanyalah fungsi Green pada persamaan diferensial linier homogen orde-n dengan koefisien konstan, dimana untuk medapatkan fungsi Green menggunakan metode Transformasi Laplace. Untuk itu perlu pengembangan lebih lanjut, misalnya fungsi Green pada persamaan diferensial parsian menggunakan metode Transformasi Fourier.

6. DAFTAR PUSTAKA

Bondan,Alit.2007. *Kalkulus Lanjut*, Yogyakarta: Graha Ilmu

Budi, NugrohoDidit. 2010.*Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*, Yogyakarta: Graha Ilmu

Departemen Agama RI. 2009. *Al-Qur'an dan Terjemahnya*,Bandung: Bandung: PT. Sigma examedia arkanleema

Degeng, I Wayan. 2007. *Kalkulus Lanjut Persamaan Diferensial dan Aplikasinya*, Yogyakarta: Graha Ilmu

El-Mazni, H. Aunur Rafqi.2006.*Pengantar Studi Ilmu Al-Qur'an*, Jakarta: Pustaka Al-Kausar

Kartono, 2012, *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*, Yogyakarta: Graha Ilmu

Mursita, Danang. 2005.*Matematika Lanjut untuk Perguruan Tinggi*, Bandung: Rekayasa Sains

Munsir, Said, dan Marwan, 2009, *Persamaan diferensial*, Yogyakarta: Graha Ilmu

Prayudi.2007.*Matematika TeknikPersamaan diferensial, Transformasi Laplace, Deret Fourier*. Yogyakarta: Graha Ilmu

Purcell, Edwin J. 1986. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: Erlangga.

Quraish, M. Shihap, 2002. *Tafsir Al-Mishbah; Pesan, Kesan Dan Keserasian Al-Qur'an*, Jakarta: Lentera Hati

R. Murray, Spiegel. 1983.*Matematika Lanjut untuk Para Insinyur dan Ilmuwan Edisi S1*, Jakarta: Erlangga

R. Murray, Spiegel.1999.*Teori dan Soal-Soal Transformasi Laplace*, Jakarta: Erlangga

Setiawan, Agus.2006. *Pengantar Metode Numerik*, Yogyakarta: Andi

Sugiarto, Iwan.*Jurnal Mengkonstruksi Fungsi Green Persamaan Diferensial Non linier Orde-n.*http//www.unpar.ac.id.(16 Maret 2002).

Yani, Ahmad,2008.*160 Materi Dakwah Pilihan* Jakarta: Gema Insani