METODE PANGKAT DAN METODE DEFLASI DALAM MENENTUKAN NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DARI MATRIKS

Arif
Prodi Matematika, FST-UINAM

Wahyuni
Prodi Matematika, FST-UINAM

Try Azisah
Prodi Matematika, FST-UINAM

Info:

Jurnal MSA Vol. 3 No. 2
Edisi: Juli – Desember 2015
Artikel No.: 9
Halaman: 64 - 74
ISSN: 2355-083X
Prodi Matematika UINAM

ABSTRAK

Metode numerik memberikan suatu cara alternatif yang digunakan untuk menemukan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks dengan menggunakan metode pangkat dan metode deflasi.Metode pangkat yang digunakan adalah metode pangkat langsung.Metode pangkat langsung digunakan untuk menentukan nilai eigen mutlak terbesar dari suatu matriks dan vektor eigen yang bersesuaian. Dengan menggabungkan metode pangkat langsung dan metode deflasi, nilai eigen dari suatu matriks yang semuanya berbeda dan berupa bilangan real akan dapat ditemukan. Penggunaan metode pangkat masih terbatas pada matriks yang seluruh nilai eigennya adalah bilangan real. Oleh sebab itu, peneliti mengharapkan ada penelitian tentang metode pangkat untuk mencari nilai eigen kompleks.

Kata Kunci: metode pangkat, metode deflasi, nilai eigen, vektor eigen

1. PENDAHULUAN

Latar belakang

Permasalahan dari fenomena riil yang dapat dijelaskan melalui pembentukan model matematika, biasa ditemukan dalam kehidupan sehari-hari, untuk menyelesaikan masalah-masalah yang melibatkan penaksiran dari sebuah fungsi yang diketahui dengan fungsi-fungsi yang lebih sederhana. Masalah-masalah yang demikian muncul dalam berbagai penerapan sain dan teknologi.

Dalam banyak kasus, tidak semua model matematika tersebut dapat diselesaikan secara mudah dengan menggunakan metode analitik. Sehingga digunakan metode numerik untuk mencari penyelesaiannya, dan hasil Perhitungan dengan metode numerik cukup dapat memberikan solusi pada persoalan yang dihadapi.

Penerapan dari metode numerik ini salah satunya yaitu dalam masalah nilai eigen dan vektor eigen. Metode numerik adalah suatu metode untuk menyelesaikan masalah-masalah matematika dengan menggunakan sekumpulan operasi aritmetika sederhana dan operasi logika pada sekumpulan bilangan atau data numerik yang diberikan.

Metode numerik memberikan suatu cara alternatif yang digunakan untuk menemukan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks. Cara yang digunakan dalam metode numerik ini termasuk unik karena dalam penyelesaiannya hanya diperlukan operasi-operasi aljabar biasa. Hanya saja, dalam penghitungannya tidak cukup dilakukan sekali tetapi harus dilakukan berulang-ulang sampai ditemukan nilai yang konvergen ke satu nilai yang merupakan nilai penyelesaiannya. Dalam penyelesaian soal-soal praktis, suatu matriks seringkali begitu besar sehingga penentuan persamaan karakteristik tidak praktis pada penggunaan metode determinan. Akibatnya, digunakan berbagai metode aproksimasi yaitu metode pangkat dan metode deflasi untuk menyelesaikannya.

Dengan metode pangkat ini, nilai eigen yang berupa bilangan real dan vektor eigennya dapat ditemukan secara bersamaan menggunakan proses yang sama pula sehingga jika nilai eigen dari suatu matriks ditemukan, maka secara otomatis vektor eigen dari matriks yang bersangkutan akan diperoleh.

Mencari nilai eigen dan vektor eigen menggunakan metode pangkat, akan memerlukan proses iterasi yang sangat panjang untuk menemukan hasil yang mendekati nilai yang sebenarnya. Semakin banyak iterasi yang dilakukan, maka semakin baik hasil yang diperoleh.

Meskipun metode pangkat bisa digunakan untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks, tetapi sulit untuk menentukan nilai eigen keseluruhan dari matriks tersebut. Oleh sebab itu, diperlukan metode deflasi berturut-turut untuk menemukannya.

Pada penelitian ini, jika metode determinan sangat sulit digunakan untuk matriks berordo di atas 3×3, maka metode pangkat yang digabungkan dengan metode deflasi dapat digunakan dengan mudah untuk mencari nilai eigen dan vektor eigen pada matriks berordo di atas 3×3. Dengan demikian, metode pangkat dan metode deflasi merupakan salah satu metode yang dapat mempermudah dalam mencari nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks.

Berdasarkan latar belakang di atas, penulis mengangkat permasalahan tentang "Metode Pangkat dan Metode Deflasi dalam Menentukan Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari Matriks".

Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka permasalahan pada penelitian ini adalah menentukan nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks dengan menggunakan metode pangkat dan metode deflasi ?

Tujuan penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks dengan menggunakan metode pangkat dan metode deflasi..

2. TINJAUAN PUSTAKA

Matriks

Definisi Matriks

Definisi 2.1.

Sebuah matriks adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Matriks ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Susunan di atas disebut sebuah matriks m kali n (ditulis $m \times n$) karena memiliki m baris dan n kolom. Sebagai aturan, kurung siku [ ], kurung biasa ( ) atau bentuk kurung mutlak || || digunakan untuk menuliskan matriks beserta elemen-elemennya.

Pada penelitian ini, penulis menggunakan kurung siku [ ] untuk menuliskan matriks beserta elemen-elemennya. Matriks dinotasikan dengan huruf-huruf besar. Sedangkan elemen-elemen dalam matriks dinotasikan dengan huruf kecil yang dicetak miring. Jika A adalah sebuah matriks, maka a_{ij} menyatakan elemen yang terdapat dalam baris i dan kolom j dari A. Sehingga $A = [a_{ij}]$ terdiagonalisasi.

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.2.

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor taknol $\mathbf{x}$ di dalam R^n dinamakan *vektor eigen* (*eigen vector*) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; yakni,

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan *nilai eigen (eigen value)* dari A dan x dikatakan vektor eigen *yang bersesuaian* dengan λ.

Contoh : Vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 3$ karena

$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ dituliskan kembali sebagai

$$Ax = \lambda Ix$$

$$0 = \lambda Ix - Ax$$

$$0 = (\lambda I - A)x$$

atau secara ekivalen

$(\lambda I\text{-}A)\mathbf{x} = 0$

supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan taknol dari persamaan ini. Persamaan (2.6) akan mempunyai pemecahan taknol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I\text{-}A) = 0$$

$\det(\lambda I\text{-}A) = 0$ dinamakan ***persamaan karakteristik*** A. Skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A. Bila diperluas, maka determinan $\det(\lambda I\text{-}A)$ adalah polinom λ yang dinamakan ***polinom karakteristik*** dari A.

Ini dapat ditunjukkan bahwa jika A adalah matriks $n \times n$, maka polinom karakteristik A harus berderajad n dan koefisien λ^n adalah 1. Jadi, polinom karakteristik dari matriks $n \times n$ mempunyai bentuk

$\det(\lambda I\text{-}A) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \ldots + c_n$

Metode Pangkat Langsung

Metode pangkat menghasilkan sebuah aproksimasi terhadap nilai eigen dengan nilai mutlak terbesar dan vektor eigen yang bersesuaian.

Definisi 2.3.

Sebuah nilai eigen dari sebuah matriks A dinamakan nilai eigen dominan (*dominant eigen value*) A jika nilai mutlaknya lebih besar dari nilai-nilai mutlak dari nilai-nilai eigen yang selebihnya. Sedangkan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan dinamakan vektor eigen dominan (*dominant eigen vector*) A.

Misalkan diketahui vektor A berukuran $n \times n$ dan dapat didiagonalkan. Misalkan pula λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nilai eigen dari A yang memenuhi hubungan

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots |\lambda_n| > 0$

Maka nilai eigen dominannya adalah λ_n

Karena A dapat didiagonalkan, terdapat vektor eigen $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ yang masing-masing berkaitan dengan nilai eigen λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dan (vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan yaitu $\mathbf{v_n}$, maka $\mathbf{v_n}$ dinamakan vektor eigen dominan) membentuk basis di R^n. kemudian sebarang vektor $\mathbf{x_0}$ di R^n dapat dituliskan sebagai

$\mathbf{x_0} = s_1 \mathbf{v_1} + s_2 \mathbf{v_2} + \ldots + s_n \mathbf{v_n}$

dengan mengalikan A diperoleh

$\mathbf{Ax_0} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)(s_1 \mathbf{v_1} + s_2 \mathbf{v_2} + \ldots + s_n \mathbf{v_n})$

$= s_1 \lambda_1 \mathbf{v_1} + s_2 \lambda_2 \mathbf{v_2} + \ldots + s_n \lambda_n \mathbf{v_n}$

Kemudian hasil terakhir ini dikalikan lagi dengan A, hal ini dilakukan berulang–ulang. Hasil sampai dengan k kali adalah

1. $\mathbf{A^k x_0} = s_1 \lambda_1^k \mathbf{v_1} + s_2 \lambda_2^k \mathbf{v_2} + \ldots + s_n \lambda_n^k \mathbf{v_n}$
2. $= \lambda_1^k \left(s_1 \mathbf{v_1} + s_2 \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]^k \mathbf{v_2} + \ldots + s_n \left[\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right]^k \mathbf{v_n} \right)$

Jika k makin besar, nilai $\left[\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right]^k$ untuk $i = 2, \ldots, n$, karena $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < i$. Oleh karena itu, untuk k yang cukup besar bentuk persamaan (2.9) menjadi

$\mathbf{A^k x_0} \approx s_1 \lambda_1^k \mathbf{v_1}$

Dengan demikian telah didapatkan hampiran dari kelipatan vektor eigen $\mathbf{v_1}$ tersebut, yaitu vektor $\mathbf{A^k x_0}$. Vektor $\mathbf{A^k x_0}$ merupakan hampiran vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen terbesar v_1. Makin besar nilai k makin baik pula hampiran $\mathbf{A^k x_0}$ terhadap sebuah vektor eigen dari A.

Setelah vektor eigen v_1 atau kelipatannya didapatkan, nilai eigen yang berkaitan dapat dihitung sebagai berikut. Karena $A\,\mathbf{v_1} = \lambda_1 \mathbf{v_1}$, maka

$A\,\mathbf{v_1}\,\mathbf{v_1} = \lambda_1 \mathbf{v_1}\,\mathbf{v_1}$

Atau

$$\lambda_1 = \frac{A\mathbf{v_1}\mathbf{v_2}}{\mathbf{v_1}\mathbf{v_2}}$$

Rumus nilai eigen ini disebut rumus pembagian Rayleigh.

Metode Deflasi

Peneliti akan memerlukan teorema berikut, dan menyatakan teorema ini tanpa bukti.

Teorema 2.1

Misalkan A adalah matriks $n \times n$ yang bujur sangkar dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Jika $\mathbf{v}^{(1)}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan
λ_1, dan $\| \mathbf{v_1} \| = 1$, maka:

(a). Matriks $B = A - \lambda_1 \mathbf{v_1} \mathbf{v_1}^t$ mempunyai nilai-nilai eigen $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

(b). Jika $\mathbf{v}$ adalah vektor eigen B yang bersesuaian dengan nilai eigen tak nol dalam himpunan $\{ \lambda_2, \ldots, \lambda_n \}$ maka $\mathbf{v}$ adalah juga vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai eigen ini.

Contoh: Mencari matriks baru pada matriks A dengan menggunakan metode deflasi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks di atas mempunyai nilai-nilai eigen $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1$, dan $V = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 5$.

Dengan menormalisasikan $\mathbf{v}$ maka akan menghasilkan $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$ yang merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 5$.

Menurut teorema 2.3, maka matriks

$$B = A - \lambda_1 \mathbf{v_1} \mathbf{v_1}^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

seharusnya mempunyai nilai-nilai eigen 5, dan 1.

Hubungan Pada Konteks Keagamaan

Allah menghendaki kemudahan bagi manusia, sehingga Allah akan memberikan kemudahan atas kesulitan yang dihadapi manusia. Jika ada kesulitan, maka akan ada solusinya. Manusia sebagai makhluk yang serba terbatas, terkadang belum mampu menemukan solusi dari permasalahan yang ada.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Penelitian

Menentukan nilai eigen dan vektor eigen dengan menggunakan metode pangkat langsung dan metode deflasi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Karena matriks A diatas berukuran 5×5, maka matriks A mempunyai 5 nilai eigen. Sehingga langkah pertama kita tentukan

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Langkah berikutnya mencari nilai $y^{(1)}$ yang memenuhi perkalian matriks

$$A\,x^{(0)} = y^{(1)}$$

$$A\,x^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 4 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

elemen vektor $y^{(1)}$ yang terbesar adalah 13 sehingga $\lambda^{(1)} = 13$

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{\lambda^{(1)}} = \frac{\begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 4 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}}{13}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.384 \\ 0.307 \\ 0.692 \\ 0.230 \end{bmatrix}$$

selanjutnya mengulangi langkah-langkah sebelumnya untuk mencari lamda dan vektor yang kedua

$A\, x^{(1)} = y^{(2)}$

$$A\, x^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.384 \\ 0.307 \\ 0.692 \\ 0.230 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.154 \\ 1.538 \\ 2.692 \\ 3.538 \\ 2.769 \end{bmatrix}$$

elemen vektor $y^{(2)}$ yang terbesar adalah 5.154 sehingga $\lambda^{(2)} = 5.154$

$$x^{(2)} = \frac{y^{(2)}}{\lambda^{(2)}} = \frac{\begin{bmatrix} 5.154 \\ 1.538 \\ 2.692 \\ 3.538 \\ 2.769 \end{bmatrix}}{5.154}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.298 \\ 0.522 \\ 0.686 \\ 0.537 \end{bmatrix}$$

selanjutnya mengulangi langkah-langkah sebelumnya untuk mencari lamda dan vektor yang ketiga

$A\, x^{(2)} = y^{(3)}$

$$Ax^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.298 \\ 0.522 \\ 0.686 \\ 0.537 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.731 \\ 3.268 \\ 3.268 \\ 4.537 \\ 1.805 \end{bmatrix}$$

elemen vektor $y^{(3)}$ yang terbesar adalah 6.731 sehingga $\lambda^{(3)} = 6.731$

$$x^{(3)} = \frac{y^{(3)}}{\lambda^{(3)}} = \frac{\begin{bmatrix} 6.731 \\ 3.268 \\ 3.268 \\ 4.537 \\ 1.805 \end{bmatrix}}{6.731}$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.485 \\ 0.485 \\ 0.674 \\ 0.268 \end{bmatrix},$$

berikut ini adalah hasil iterasi untuk mendapatkan nilai eigen yang pertama dengan menggunakan program matlab.

Tabel 3.1 Hasil iterasi pertama metode pangkat langsung pada program matlab, hasil iterasi yang selengkapnya dapat dilihat pada lampiran 3

Iterasi (k)	$\lambda^{(k)}$	$X_1^{(k)}$	$X_2^{(k)}$	$X_3^{(k)}$	$X_4^{(k)}$	$X_5^{(k)}$
1	13	1	0.38461	0.30769	0.69231	0.23076
2	5.15385	1	0.29851	0.52238	0.68656	0.53731
3	6,73134	1	0.48558	0.48558	0.67405	0.26829
4	6,08869	1	0.32265	0.37618	0.73088	0.51529
5	6.35032	1	0.43462	0.57690	0.64990	0.28317
6	6,27589	1	0.37618	0.32694	0.73311	0.48299
7	6,17471	1	0.39039	0.59666	0.66001	0.32495
8	6,44239	1	0.41041	0.33680	0.71574	0.43353
9	6,04737	1	0.36477	0.56875	0.67942	0.37494
10	6,52653	1	0.42610	0.37890	0.69723	0.38891
11	6,02071	1	0.35684	0.51756	0.69640	0.41365

12	6,50696	1	0.42668	0.43005	0.68396	0.36071
13	6.07553	1	0.36258	0.46690	0.70637	0.43255
14	6.42228	1	0.41722	0.47271	0.67788	0.35143
15	6.16898	1	0.37540	0.43208	0.70881	0.43282
16	6.32166	1	0.40380	0.49732	0.67832	0.35747
17	6.26087	1	0.38893	0.41787	0.70570	0.42107
18	6.24110	1	0.39170	0.50253	0.68298	0.37196
19	6.32437	1	0.39894	0.42110	0.69993	0.40506
20	6.19717	1	0.38413	0.49327	0.68906	0.38771
21	6.34983	1	0.40375	0.43467	0.69413	0.39095
22	6.18976	1	0.38184	0.47723	0.69424	0.39954
23	6.34244	1	0.40376	0.45104	0.69000	0.38221
24	6.20834	1	0.38371	0.46159	0.69726	0.40521
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
88	6.26903	1	0.39312	0.45999	0.69301	0.39264
89	6.26918	1	0.39314	0.45996	0.69300	0.39262
90	6.26906	1	0.39312	0.45997	0.69301	0.39264
91	6.26915	1	0.39313	0.45998	0.69300	0.39262
92	6.26909	1	0.39312	0.45996	0.69301	0.39264
93	6.26912	1	0.39313	0.45998	0.69300	0.39262
94	6.26911	1	0.39313	0.45995	0.69302	0.39264

Berdasarkan tabel 3.1 di atas, dapat diketahui bahwa nilai eigen terbesar dari matriks A pada iterasi ke-94 adalah 6.26911 iterasi berhenti karena galat maksimal yang digunakan dalam program adalah 1 x 10^{-5} dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu:

$$x^{(94)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.39313 \\ 0.45995 \\ 0.69302 \\ 0.39264 \end{bmatrix}$$

masuk ke metode deflasi

Langkah pertama yaitu mencari nilai eigen mutlak terbesar ($\lambda_1 = \lambda_{largest}$) dan vektor eigen ($\mathbf{v^{(1)}}$) yang bersesuaian dari matriks A. Dengan metode pangkat langsung, diperoleh bahwa nilai eigen terbesar dari matriks A pada iterasi ke-94 adalah 6.2691 dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu:

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.39313 \\ 0.45995 \\ 0.69302 \\ 0.39264 \end{bmatrix}$$

Langkah kedua yaitu menormalisasikan $\mathbf{v^{(1)}}$, v_1 = normalisasi $v^{(1)}$ yaitu

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.39313 \\ 0.45995 \\ 0.69302 \\ 0.39264 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.15455 \\ 0.21155 \\ 0.48027 \\ 0.15417 \end{bmatrix} = 2{,}00053 = \sqrt{2.00053} = 1.41441 \text{ maka}$$

$$v_1 = \frac{1}{1{,}41441}\begin{bmatrix} 1 \\ 0.39313 \\ 0.45995 \\ 0.69302 \\ 0.39264 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.70701 \\ 0.27794 \\ 0.32519 \\ 0.48997 \\ 0.27760 \end{bmatrix}$$

Langkah ketiga, menghitung elemen-elemen matriks B dengan menggunakan persamaan $B = A - \lambda_1 v_1 v_1^t =$

$$B = \begin{bmatrix} -4.13369 & 0.76805 & 2.55862 & 2.82830 & 1.76958 \\ -1.23194 & -2.48431 & 2.43335 & 0.14624 & 2.51629 \\ 0.55863 & -0.56664 & -3.66297 & 0.00110 & 3.43405 \\ -1.17170 & 2.14624 & 2.00110 & -1.50502 & 1.14730 \\ 0.76958 & 2.51628 & 0.43406 & -0.85270 & -3.48311 \end{bmatrix}$$

Matriks B ini seharusnya memiliki nilai eigen dibawah (λ_1) = 6.26911

Langkah berikutnya mencari nilai eigen mutlak terbesar (λ_2) dan vektor eigen ($\mathbf{v^2}$) yang bersesuaian dari matriks B dengan metode pangkat langsung. Dengan menggunakan deskripsi program pada lampiran.

Tabel 3.2 Hasil iterasi kedua metode pangkat langsung pada program matlab, hasil iterasi yang selengkapnya dapat dilihat pada lampiran 4

Iterasi (k)	$\lambda^{(k)}$	$X_1^{(k)}$	$X_2^{(k)}$	$X_3^{(k)}$	$X_4^{(k)}$	$X_5^{(k)}$
1	3.79086	1	0.36393	-0.06221	0.69058	-0.16246
2	1.63535	-1.43556	-1.58697	0.01414	-1.06450	1
3	8.10609	0.43305	1	0.42911	0.12999	-0.94587
4	6.21954	-0.19780	-0.69695	-0.82716	0.19562	1
5	6.74857	0.07243	0.37152	1	-0.30620	-0.87646
6	4.73859	0.02692	-0.17496	-1.44414	0.45770	1
7	8.83861	-0.09917	-0.05989	1	-0.32114	-0.55662
8	2.41964	0.42539	0.51939	-2.31285	0.75774	1
9	11.85011	-0.28392	-0.40634	1	-0.33798	-0.29526
10	3.00024	0.64721	1	-1.53509	0.54381	0.16988
11	6.00187	-0.66585	-1.08467	1	-0.38447	0.21537
12	6.43402	0.58621	1	-0.41671	0.19879	-0.50203
13	4.36565	-0.69806	-1.24945	-0.09999	-0.05719	1
14	6.22861	0.52627	1	0.66119	-0.13332	-1.14936
15	7.32534	-0.29030	-0.60548	-0.90667	0.23681	1
16	6.93637	0.12319	0.31810	1	-0.28585	-0.83985
17	4.49838	-0.00022	-0.14757	-1.48027	0.44596	1
18	8.94025	-0.09720	-0.07311	1	-0.31347	-0.54556
19	2.34281	0.44914	0.56176	-2.36880	0.76999	1
20	12.04435	-0.29380	-0.42212	1	-0.33811	-0.28301
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
76	3.52897	0.63173	1	-1.22131	0.44714	-0.01880
77	4.19582	-0.89061	-1.48156	1	-0.41290	0.51397
78	8.44413	0.57364	1	-0.18432	0.12742	-0.64157
79	5.00377	-0.56952	-1.04626	-0.35455	0.03545	1
80	5.00753	0.50191	0.99043	1	-0.23840	-1.34562

diperoleh nilai eigen terbesar dari matriks B pada iterasi ke-80 adalah (λ_2) = 5.00752 iterasi berhenti karena galat maksimal yang digunakan dalam program adalah 1 x 10^{-3} dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu:

$$(\mathbf{v}^2) = \begin{bmatrix} 0.50191 \\ 0.99043 \\ 1 \\ -0.23840 \\ -1.34562 \end{bmatrix}$$

Langkah kedua yaitu menormalisasikan $\mathbf{v}^{(2)}$

$$v_2 = \frac{1}{2.02494}\begin{bmatrix} 0.50191 \\ 0.99043 \\ 1 \\ -0.23840 \\ -1.34562 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.24786 \\ 0.48911 \\ 0.49384 \\ -0.11773 \\ -0.66452 \end{bmatrix}$$

Langkah ketiga, menghitung elemen-elemen matriks B dengan menggunakan persamaan $B = A - \lambda_2 v_2 v_2^t =$

$$B = \begin{bmatrix} -4.44134 & 0.16097 & 1.94567 & 2.97442 & 2.59438 \\ -1.83903 & -3.68227 & 1.22381 & 0.43459 & 4.14387 \\ -0.05432 & -1.77618 & -4.88420 & 0.29224 & 5.07737 \\ -1.02557 & 2.43459 & 2.29224 & -1.57443 & 0.75554 \\ 1.59438 & 4.14387 & 2.07737 & -1.24446 & -5.69439 \end{bmatrix}$$

Matriks B ini seharusnya memiliki nilai eigen dibawah (λ_2) = 5.00752

Langkah berikutnya mencari nilai eigen mutlak terbesar (λ_3) dan vektor eigen ($\mathbf{v}^3$) yang bersesuaian dari matriks B dengan metode pangkat langsung. Dengan menggunakan deskripsi program pada lampiran,

Tabel 3.3 Hasil iterasi ketiga metode pangkat langsung pada program matlab, hasil iterasi yang selengkapnya dapat dilihat pada lampiran 5

Iterasi (k)	$\lambda^{(k)}$	$X_1^{(k)}$	$X_2^{(k)}$	$X_3^{(k)}$	$X_4^{(k)}$	$X_5^{(k)}$
1	3.23411	1	0.08687	-0.41591	0.89124	0.27110
2	3.45969	-0.54407	-0.33447	1	-0.85724	-0.45162
3	3.46240	0.16946	0.35004	-1.96514	0.87926	1

diperoleh nilai eigen terbesar dari matriks B pada iterasi ke-3 adalah $(\lambda_3) = 3.46240$ iterasi berhenti karena galat maksimal yang digunakan dalam program adalah 1×10^{-3} dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu:

$$\mathbf{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.16946 \\ 0.35004 \\ -1.96515 \\ 0.87926 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Langkah kedua yaitu menormalisasikan $\mathbf{v}^{(3)}$.

$$\mathrm{v}_3 = \frac{1}{2.02494}\begin{bmatrix} 0.16946 \\ 0.35004 \\ -1.96515 \\ 0.87926 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.07045 \\ 0.14552 \\ -0.81696 \\ 0.36553 \\ 0.41572 \end{bmatrix}$$

Langkah ketiga, menghitung elemen-elemen matriks B dengan menggunakan persamaan $B = A - \lambda_3 \mathrm{v}_3 \mathrm{v}_3^t =$

$$B = \begin{bmatrix} -4.45852 & 0.12547 & 2.14495 & 2.88526 & 2.49297 \\ -1.87452 & -3.75560 & 1.63544 & 0.25041 & 3.93441 \\ 0.14495 & -1.36455 & -7.19508 & 1.32619 & 6.25330 \\ -1.11474 & 2.25041 & 3.32620 & -2.03704 & 0.22939 \\ 1.49298 & 3.93440 & 3.25330 & -1.77061 & -6.29278 \end{bmatrix}$$

Matriks B ini seharusnya memiliki nilai eigen dibawah $(\lambda_3) = 3.46240$

Langkah berikutnya mencari nilai eigen mutlak terbesar (λ_4) dan vektor eigen $(\mathbf{v}^4)$ yang bersesuaian dari matriks B dengan metode pangkat langsung. Dengan menggunakan deskripsi program pada lampiran,

Tabel 3.4 Hasil iterasi keempat metode pangkat langsung pada program matlab, Hasil iterasi yang selengkapnya dapat dilihat pada lampiran 6

Iterasi (k)	$\lambda^{(k)}$	$X_1^{(k)}$	$X_2^{(k)}$	$X_3^{(k)}$	$X_4^{(k)}$	$X_5^{(k)}$
1	3.19014	1	0.05960	-0.26180	0.83201	0.19350
2	4.26074	-0.49983	-0.36540	1	-0.82189	-0.42599
3	5.20538	0.17179	0.39629	-2.02152	0.89091	1
4	21.46401	0.00052	-0.04467	1	-0.35451	-0.58848
5	7.40921	-0.04763	-0.08123	-1.52299	0.51452	
6	17.99765	0.05072	0.10928	1	-0.33416	-0.69727
7	8.73846	-0.08811	-0.19421	-1.38929	0.46191	1
8	17.1142	0.07094	0.15615	1	-0.33138	-0.73191
9	9.16612	-0.10173	-0.22328	-1.35435	0.44791	1
10	16.88200	0.07735	0.16946	1	-0.33035	-0.74176
11	9.28818	-0.10561	-0.23116	-1.34490	0.44402	1
12	16.81895	0.07915	0.17315	1	-0.33004	-0.74448
13	9.32200	-0.10667	-0.23331	-1.34232	0.44295	1
14	16.80174	0.07964	0.17416	1	-0.32995	-0.74524
15	9.33128	-0.10696	-0.23390	-1.34161	0.44265	1
16	16.79704	0.07977	0.17444	1	-0.32993	-0.74544
17	9.33381	-0.10705	-0.23406	-1.34142	0.44257	1
18	16.79576	0.07981	0.17451	1	-0.32992	-0.74549
19	9.33450	-0.10706	-0.23410	-1.34136	0.44255	1
20	16.79104	0.07982	0.17453	1	-0.32992	-0.74551
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
95	9.33476	-0.10707	-0.23412	-1.34134	0.44254	1
96	16.79528	0.07982	0.17454	1	-0.32992	-0.74551
97	9.33476	-0.10707	-0.23412	-1.34134	0.44254	1
98	16.79528	0.07982	0.17454	1	-0.32992	-0.74551
99	9.33476	-0.10707	-0.23412	-1.34134	0.44254	1
100	16.79528	0.07982	0.17454	1	-0.32992	-0.74551

diperoleh nilai eigen terbesar dari matriks B pada iterasi ke-100 adalah $(\lambda_4) = 16.7953$ iterasi berhenti karena iterasi maksimal yang digunakan dalam program adalah iterasi 100 dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu:

$$\mathbf{v}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.07983 \\ 0.17454 \\ 1 \\ -0.32993 \\ -0.74552 \end{bmatrix}$$

Langkah kedua yaitu menormalisasikan $\mathbf{v}^{(4)}$.

$$\mathrm{v}_4 = \frac{1}{2.02494}\begin{bmatrix} 0.07983 \\ 0.17454 \\ 1 \\ -0.32993 \\ -0.74552 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06120 \\ 0.13381 \\ 0.76663 \\ -0.25293 \\ -0.57154 \end{bmatrix}$$

Langkah ketiga, menghitung elemen-elemen matriks B dengan menggunakan persamaan $B = A - \lambda_4 \mathrm{v}_4 \mathrm{v}_4^t =$

$$B = \begin{bmatrix} -4.52142 & -0.01206 & 1.35697 & 3.14524 & 3.08043 \\ -2.01206 & -4.05632 & -0.08747 & 0.81885 & 5.21887 \\ -0.64303 & -3.08748 & -17.06603 & 4.58287 & 13.61227 \\ -0.85476 & 2.81885 & 6.58287 & -3.11151 & -2.19852 \\ 2.08043 & 5.21887 & 10.61227 & -4.19852 & -11.77902 \end{bmatrix}$$

Matriks B ini seharusnya memiliki nilai eigen dibawah $(\lambda_4) = 16.7953$

Langkah berikutnya mencari nilai eigen mutlak terbesar (λ_5) dan vektor eigen $(\mathbf{v}^5)$ yang bersesuaian dari matriks B dengan metode pangkat langsung. Dengan menggunakan deskripsi program pada lampiran,

Tabel 3.5 Hasil iterasi pertama metode pangkat langsung pada program matlab, Hasil iterasi yang selengkapnya dapat dilihat pada lampiran 7

Iterasi (k)	$\lambda^{(k)}$	$X_1^{(k)}$	$X_2^{(k)}$	$X_3^{(k)}$	$X_4^{(k)}$	$X_5^{(k)}$
1	3.23693	0.94198	-0.03649	-0.40635	1	0.59748
2	20.36924	0.00862	0.10924	1	-0.39314	-0.67647
3	20.81928	-0.09624	-0.21136	-1.36450	0.46082	1
4	39.60150	0.07868	0.17086	1	-0.33151	-0.74486
5	21.83327	-0.10708	-0.23348	-1.33747	0.44273	1
6	39.11870	0.08039	0.17538	1	-0.33097	-0.74830
7	21.89878	-0.10752	-0.23458	-1.33609	0.44219	1
8	39.09572	0.08050	0.17561	1	-0.33096	-0.74848
9	21.90220	-0.10755	-0.23463	-1.33602	0.44216	1
10	39.09451	0.08050	0.17562	1	-0.33095	-0.74849
11	21.90239	-0.10755	-0.23463	-1.33602	0.44216	1
12	39.09444	0.08050	0.17562	1	-0.33095	-0.74849
13	21.90240	-0.10755	-0.23463	-1.33602	0.44216	1
14	39.09444	0.08050	0.17562	1	-0.33095	-0.74849
15	21.90240	-0.10755	-0.23463	-1.33602	0.44216	1
16	39.09444	0.08050	0.17562	1	-0.33095	-0.74849
17	21.90240	-0.10755	-0.23463	-1.33602	0.44216	1
18	39.09444	0.08050	0.17562	1	-0.33095	-0.74849
19	21.90240	-0.10755	-0.23463	-1.33602	0.44216	1
20	39.09444	0.08050	0.17562	1	-0.33095	-0.74849
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
95	21.90240	-0.10755	-0.23463	-1.33602	0.44216	1
96	39.09444	0.08050	0.17562	1	-0.33095	-0.74849
97	21.90240	-0.10755	-0.23463	-1.33602	0.44216	1
98	39.09444	0.08050	0.17562	1	-0.33095	-0.74849
99	21.90240	-0.10755	-0.23463	-1.33602	0.44216	1
100	39.09444	0.08050	0.17562	1	-0.33095	-0.74849

diperoleh nilai eigen terbesar dari matriks *B* pada iterasi ke-100 adalah (λ_5) = 39.09444 iterasi berhenti karena iterasi maksimal yang digunakan dalam program adalah iterasi 100 dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu:

$$v^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.08050 \\ 0.17562 \\ 1 \\ -0.33095 \\ -0.74849 \end{bmatrix}$$

4. PEMBAHASAN.

Pada penelitian ini, peneliti akan mencari nilai eigen dan vektor eigen dengan menggunakan metode pangkat langsung yang digabungkan dengan metode deflasi. Dalam penelitian ini matriks yang diangkat pada contoh yaitu matriks 5x5, $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan iterasi pada metode pangkat langsung pada matriks tersebut kita akan menemukan nilai iegen dan vektor eigen yang pertama, nilai eigen yang pertama 6.26911 dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu: $v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.39313 \\ 0.45995 \\ 0.69302 \\ 0.39264 \end{bmatrix}$. Kemudian vektor eigen yang di dapat pada itetasi pertama, dapat dicari matriks 5x5 selanjutnya dengan menggunakan metode deflasi. Sehingga di dapatlah matriks kedua Setelah mendapatkan matriks 5x5 yang kedua, akan di iterasi lagi menggunakan metode pangkat langsung, Langkah ini diulang sebanyak jumlah kolom atau jumlah baris pada matriks, karena banyaknya nilai eigen dan vektor eigen yang didapat berdasarkan jumlah kolom atau jumlah baris pada matriks. Berikut adalah hasil keseluruhan perhitungan dengan menggunakan metode pangkat langsung dan metode deflasi.

Tabel 3.6 Nilai Eigen dari Metode Pangkat Langsung dan Metode Deflasi dengan Bantuan Matlab

	Nilai eigen	Banyak iterasi
λ_1	6.26911	94
λ_2	5.00752	80
λ_3	3.46240	3
λ_4	16.7953	100
λ_5	39.09444	100

Tabel 3.7 Vektor Eigen dari Metode Pangkat Langsung dan Metode Deflasi dengan Bantuan Matlab

Vektor Eigen				
$v^{(1)}$	$v^{(2)}$	$v^{(3)}$	$v^{(4)}$	$v^{(5)}$
1	0.50191	0.16946	0.07983	0.08050
0.39313	0.99043	0.35004	0.17454	0.17562
0.45995	1	−1.96515	1	1
0.69302	−0.23840	0.87926	−0.32993	−0.33095
6.26911	−1.34562	1	−0.74552	−0.74849

$\lambda_1 = |6.26911 - 6.26912| = |-0.00001|$

$= 0.00001 = 1.0 \times 10^{-5}$

$\lambda_2 = |5.00753 - 5.00377| = |0.00376|$

$= 0.00376 = 3.76 \times 10^{-3}$

$\lambda_3 = |3.46240 - 3.45969| = |0.00271|$

$= 0.00271 = 2.71 \times 10^{-3}$

Pada λ_4 dan λ_5 iterasinya melebihi batas iterasi maksimal yaitu pada iterasi ke-100 sehinggan iterasinya berhenti, dan tidak memiliki nilai eror.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan contoh yang diangkat pada penelitian, pada matriks 5 x 5 yaitu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

dapat di simpulkan bahwa nilai eigen dan vektor eigen dapat ditentukan dengan menggunakan metode pangkat dan metode deflasi yaitu:

1. Nilai eigen yang pertama 6.2691 dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu $(v^1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.39313 \\ 0.45995 \\ 0.69302 \\ 0.39264 \end{bmatrix}$ pada iterasi ke-94.
2. Nilai eigen yang kedua 5.00752 dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu $(v^2) = \begin{bmatrix} 0.50191 \\ 0.99043 \\ 1 \\ -0.23840 \\ -1.34562 \end{bmatrix}$ pada iterasi ke-80.
3. Nilai eigen yang ketiga 3.46240 dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu $(v^3) = \begin{bmatrix} 0.16946 \\ 0.35004 \\ -1.96515 \\ 0.87926 \\ 1 \end{bmatrix}$ pada iterasi ke-3.
4. Nilai eigen yang keempat 16.7953 dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu $(v^4) = \begin{bmatrix} 0.07983 \\ 0.17454 \\ 1 \\ -0.32993 \\ -0.74552 \end{bmatrix}$ pada iterasi ke-100.
5. Nilai eigen yang kelima 39.09444 dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu $(v^5) = \begin{bmatrix} 0.08050 \\ 0.17562 \\ 1 \\ -0.33095 \\ -0.74849 \end{bmatrix}$ pada iterasi ke-100.

6. SARAN

Penggunaan metode pangkat dan metode deflasi masih terbatas pada matriks yang seluruh nilai eigennya adalah bilangan real. Oleh sebab itu, peneliti mengharapkan ada penelitian tentang metode pangkat untuk mencari nilai eigen kompleks.

7. DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1997. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Anton, Howard. 2005. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi ketga, Jakarta: Erlangga.

Ayres, Frank. 1984. *Matriks*. Jakarta: Erlangga.

Budhi, Wono Setya. 1995. *Aljabar Linear*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama

Farida, Noor. 2007. *Aplikasi Metode Pangkat Dan Metode Deflasi Dalam Mengaproksimasi Nilai eigen dan Vektor Eigen Dari Matriks*. Skripsi tidak diterbitkan. Malang: Fakultas Sains Dan Teknologi UIN Malang

Hadley, G. 1992. *Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.

Hidayah, Nikmatul. 2004. *Penggunaan Metode Householder dan Metode-QR untuk Mengaproksimasi Nilai-Nilai Eigen Matriks Setangkup Nyata*. Skripsi tidak diterbitkan. Malang: Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang

Karso. Penerapan Aljabar Linear. 6 Desember 2012 *http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR._PEND._MATEMATIKA/195509091980021-KARSO/MODUL_12_ALJABAR_LINEAR_2006.pdf*

Karso. Nilai Eigen, Vektor Eigen Dan Diagonalisasi Matriks. 14 Februari 2013 *http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR._PEND._MATEMATIKA/195509091980021-KARSO/MODUL_11_ALJABAR_LINEAR_2006.pdf*

Leon, Steven J. 2001. Aljabar Linear dan Aplikasinya. Jakarta: Erlangga

Munir, Rinaldi. 2006. Metode Numerik. Bandung: Informatika

Sahid. 2005. Pengantar Komputasi Numerik Dengan Matlab. Yogyakarta: ANDI.

Simmons, Bruce. Invers of matrix multiplicative invers of a Matrikx. 3 Desember 2012. *http://www.mathwords.com/i/inverse_of_a_matrix.htm*

Soejeoti, Zalbawi, dkk. 1998. Al-Islam & Iptek. Jakarta: PT RajaGrafindo Persada

Spiegel, Murray. 1994. *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuwan*. Jakarta: Erlangga

Weber, Jean E. 1999. *Analisis Matematika Penerapan Bisnis dan Ekonomi*. Jakarta: Erlangga

Wikipedia Aljabar Linier, 10 juli 2012 *http://id.wikipedia.org/wiki/Aljabar_linear*

Mathews, John H. 14 April 2012. Numerical Analysis & Numerical Methods.

http://math.fullerton.edu/mathews/software/software.html