PENERAPAN METODE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON PADA PERSAMAAN LOGISTIK DALAM MEMPREDIKSI PERTUMBUHAN PENDUDUK DI PROVINSI SULAWESI SELATAN

Try Azisah Nurman

Prodi Matematika,
Fakultas Sains dan Teknologi, UINAM

Wahyuni Abidin

Prodi Matematika,
Fakultas Sains dan Teknologi, UINAM

Sumarni

Prodi Matematika,
Fakultas Sains dan Teknologi, UINAM

Info:

Jurnal MSA Vol. 4 No. 1
Edisi: Januari – Juni 2016
Artikel No.: 8
Halaman: 54 - 59
ISSN: 2355-083X
Prodi Matematika UINAM

ABSTRAK

Persamaan logistik yang merupakan persamaan diferensial biasa (PDB) non linear.Salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaiakan suatu PDB non linear adalah metode Adams-Bashforth-Moulton.Metode Adams-Bashforth-Moulton merupakan metode multistep yang terdiri dari metode Adams-Bashforth sebagai prediktor dan metode Adams-Moulton sebagai korektor.Persamaan diferensial tersebut terlebih dahulu diselesaikan menggunakan metode Runge Kutta orde empat untuk memperoleh empat solusi awal.Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh hasil prediksi pertumbuhan penduduk di Provinsi Sulawesi Selatan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton.Persamaan logistik pada pertumbuhan penduduk dengan ukuran langkah $h = 1$ *dan kapasitas tampung Provinsi Sul-Sel yaitu*$K = 20.000.000$*, dengan laju pertumbuhan* 2%*. Solusi numerik persamaan logistik pertumbuhan penduduk pada saat* $t = 2020$ *dengan ukuran langkah yang optimal* $h = 1$ *adalah 8.944.168 jiwa.*

Kata Kunci: Persamaan Diferensial Biasa, Metode Runge Kutta, Metode Adams-Bashforth-Moulton

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial biasa terbagi menjadi dua, yakni persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial biasa non linear.Beberapa fenomena di alam yang dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial yaitu model ayunan sederhana, model logistik menurut Verhulst, laju perubahan tekanan uap suatu zat, hukum Newton tentang gerak dan lain-lain.Namun, yang merupakan persamaan diferensial biasa non linear yaitu model ayunan sederhana dan model logistik.Suatu persamaan diferensial dapat diselesaikan secara analitik atau secara numerik.Sebagian besar persamaan diferensial non linear sulit ditemukan solusinya secara analitik, sehingga penyelesaian secara numerik dapat digunakan untuk memperoleh solusi persamaan diferensial non linear tersebut.Solusi yang diperoleh dari metode numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan dari solusi analitiknya, sehingga solusi numerik tersebut memuat nilai kesalahan.Metode numerik dalam penyelesaian persamaan diferensial biasa terbagi atas dua metode, yaitu metode satu langkah (*one-step*) dan metode banyak langkah (*multi-step*).Metode banyak langkah (*multi-step*) biasa disebut juga metode prediktor-korektor.Dalam memperoleh solusi metode banyak langkah terbagi atas 2 langkah yakni langkah pertama adalah prediksi dengan menggunakan persamaan predictor dan langkah kedua adalah koreksi dengan menggunakan persamaan korektor.Metode banyak langkah (*multi-step*) yang banyak ditulis dalam literatur yakni Metode Adams-Bashforth-Moulton.

2. PENERAPAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA NON LINEAR DALAM PERTUMBUHAN PENDUDUK

Model logistik adalah model yang menggambarkan pertumbuhan populasi.Misalnya $P(t)$ adalah jumlah penduduk di suatu kota saat *t*. Selanjutnya diasumsikan laju kelahiran dan laju kematian sebanding dengan jumlah penduduk saat itu. Misalnya β laju kelahiran, dan δ laju kematian, maka selama selang waktu Δt terdapat kelahiran sejumlah $\beta\Delta tP(t)$ dan kematian $\delta\Delta tP(t)$. Maka

$$\Delta P = (\beta - \delta)P(t)\Delta t \quad (1)$$

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = mP(t) \quad (2)$$

Solusi persamaan diferensial diatas $P(t) = P_0 e^{mt}$ dengan P_0menyatakan jumlah populasi awal.

Pertumbuhan populasi secara eksponensial tidak relevan untuk populasi penduduk, juga mungkin untuk populasi-populasi lain. Jika laju kelahiran β merupakan fungsi P, dan $\beta(P) = konstanta - aP$ (interpretasi), sedemikian sehingga

$$\frac{dP}{dt} = (m - aP)P$$

$$\frac{dP}{dt} = \left(m - \frac{m}{K}P\right)P$$

$$\frac{dP}{dt} = m\left(1 - \frac{P}{K}\right)P \quad (3)$$

$$P(t_0) = P_0$$

Dimana $K = m/a$. Persamaan di atas merupakan Persamaan diferensial biasa orde satu non linear dan disebut sebagai persamaan logistic.

Metode Rugge-Kutta

Salah satu metode yang relatif sederhana dan cukup akurat yang sering digunakan adalah metode Runge-Kutta.Metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari metode deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x,y)$ pada titik terpilih dalam setiap selang langkah.Metode Runge-Kutta adalah metode PDB yang paling populer karena banyak dipakai dalam praktek.

Diperhatikan persamaan diferensial tingkat satu:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad a \le x \le b \quad y(x_0) = y_0 \quad (4)$$

Tahap awal penyelesaian numerik adalah dengan menentukan titik-titik dalam jarak yang sama di dalam interval $[a,b]$, yaitu dengan menerapkan

$$x_r = x_0 + rh, \qquad r = 0,1,2,\dots,n \quad (5)$$

Dimana h menyatakan jarak antar titik yang dirumuskan oleh

$$h = \frac{b-a}{n} \quad (6)$$

yang juga biasa dikenal sebagai lebar langkah (*step size*).

Metode Runge-Kutta orde empat yang sering digunakan adalah sebagai berikut:

$$k_1 = hf(x_r, y_r)$$

$$k_2 = hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_r + h, y_r + k_3)$$

$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Metode Adams-Bashforth-Moulton

Metode Adams-Bashforth-Moulton melibatkan dua langkah.Langkah pertama adalah prediksi dan langkah kedua adalah koreksi [6]. Metode prediktor-korektor adalah suatu satu himpunan dua persamaan untuk y_{r+1}. Persamaan pertama disebut *predictor*, digunakan untuk memprediksi (memperoleh aproksimasi pertama untuk) y_{r+1}; persamaan kedua, yang disebut *korektor*, kemudian digunakan untuk memperoleh nilai hasil koreksi (aproksimasi kedua untuk) y_{r+1} [7].

Tinjau PDB orde satu

$$y' = f(x, y(x)) \quad (7)$$

Integrasikan kedua ruas persamaan dari $x_r$sampai x_{r+1}:

$$\int_{x_r}^{x_{r+1}} f\big(x, y(x)\big)dx = \int_{x_r}^{x_{r+1}} y'(x)dx$$

$$= y(x)|_{x_r}^{x_{r+1}}$$

$$= y(x_{r+1}) - y(x_r)$$

$$= y_{r+1} - y_r$$

Nyatakan y_{r+1} diruas kiri persamaan dan suku lainnya di ruas kanan.

$$y_{r+1} = y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} f\big(x, y(x)\big)dx \qquad (8)$$

Persamaan prediktor diperoleh dengan menghampiri fungsi $f\big(x, y(x)\big)$ ke dalam polinom interpolasi derajat tiga. Untuk itu, diperlukan empat buah titik yang berjarak sama, yaitu:
$(x_{r-3}, f_{r-3}), (x_{r-2}, f_{r-2}), (x_{r-1}, f_{r-1}), (x_r, f_r)$,
dari empat buah titik tersebut, dibentuk polinom interpolasi Lagrange derajat tiga:

$$f\big(x, y(x)\big) \approx \frac{(x-x_{r-2})(x-x_{r-1})(x-x_r)f_{r-3}}{(x_{r-3}-x_{r-2})(x_{r-3}-x_{r-1})(x_{r-3}-x_r)} + \frac{(x-x_{r-3})(x-x_{r-1})(x-x_r)f_{r-2}}{(x_{r-2}-x_{r-3})(x_{r-2}-x_{r-1})(x_{r-2}-x_r)} + \frac{(x-x_{r-3})(x-x_{r-2})(x-x_r)f_{r-1}}{(x_{r-1}-x_{r-3})(x_{r-1}-x_{r-2})(x_{r-1}-x_r)} + \frac{(x-x_{r-3})(x-x_{r-2})(x-x_r)f_r}{(x_r-x_{r-3})(x_r-x_{r-2})(x_r-x_{r-1})} \qquad (9)$$

Setelah itu persamaan (9) diselesaikan dan di substitusi ke dalam persamaan (8). Hasil integrasi persamaan (8) memberikan

$$y^*_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(-9f_{r-3} + 37f_{r-2} - 59f_{r-1} + 55f_r) \qquad (10)$$

Yang merupakan persamaan prediktor.

Persamaan korektor dibentuk dengan cara yang sama seperti pada persamaan prediktor. Tetapi, titik-titik yang diperlukan untuk pembentukan polinom interpolasi

$$(x_{r-2}, f_{r-2}), (x_{r-1}, f_{r-1}), (x_r, f_r),$$

dan titik baru $x_{r+1}, f^*_{r+1} = (x_{r+1}, f(x_{r+1}, y^*_{r+1}))$

dari empat buah titik tersebut, terbentuk polinom interpolasi Lagrange derajat tiga. Kemudian, integrasikan polinom interpolasi tersebut dalam selang $[x_r, x_{r+1}]$,

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(f_{r-2} - 5f_{r-1} + 19f_r + 9f^*_{r+1}) \qquad (11)$$

$$f^{(0)}_{r+1} = f\Big(x_{r+1}, y^{(0)}_{r+1}\Big) \qquad (12)$$

Yang merupakan persamaan korektor.

Jadi, metode Adams-Bashforth-Moulton dapat diringkas sebagai berikut:

$Prediktor$

$$y^*_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(-9f_{r-3} + 37f_{r-2} - 59f_{r-1} + 55f_r)$$

$Korektor$:

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(f_{r-2} - 5f_{r-1} + 19f_r + 9f^*_{r+1})$$

3. PEMBAHASAN

Data yang akan digunakan adalah data jumlah Penduduk

Tabel 1: Data Jumlah penduduk Provinsi Sulawesi Selatan

No	Tahun	Hasil Sensus
1	2005	7.494.701
2	2006	7.629.138
3	2007	7.700.255
4	2008	7.805.024
5	2009	7.908.519
6	2010	8.034.776
7	2011	8.115.638
8	2012	8.250.018
9	2013	8.342.047
10	2014	8.432.163

Sumber: BPS Provinsi Sulawesi Selatan

Berdasarkan Tabel 1 mengenai data jumlah penduduk Provinsi Sul-Sel menurut

Badan Pusat Statistik (BPS) hasil sensus antara tahun 2005-2014, dari data tersebut maka diperoleh pertambahan penduduk sebagai berikut:

Tabel 2 Pertambahan Penduduk dari 2005-2014

No	Tahun	Pertambahan Penduduk setiap tahun
1	2005-2006	134.437
2	2006-2007	71.117
3	2007-2008	104.769
4	2008-2009	103.495
5	2009-2010	126.257
6	2010-2011	80.862
7	2011-2012	134.380
8	2012-2013	92.029
9	2013-2014	90.116

Berdasarkan Tabel 2 menunjukkan bahwa setiap tahunnya jumlah penduduk bertambah dengan rata-rata 104.162 Jiwa. Peneliti ingin memprediksikan pertumbuhan penduduk di tahun yang akan datang dengan persamaan logistik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton sebagai berikut:

Untuk menentukan laju pertumbuhan digunakan rumus sebagai berikut

$$m = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{P(t)}{P_0}\right)$$

$$m = \frac{1}{1}\ln\left(\frac{7.629.138}{7.494.701}\right) = 0{,}01777 = 0{,}02$$

Misalkan diasumsikan untuk kapasitas tampung Provinsi Sul-Sel yaitu $K = 20.000.000$, dengan laju pertumbuhan 2%, $P(0) = 7.494.701$ sebagai nilai awal. Pada interval [0,15]

Dengan banyak iterasi $n = 15$,

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{15-0}{15} = 1$$

denganukuran langkah $h = 1$

LaluMemberikan Persamaan Logistik pada Pertumbuhan Penduduk

Nilai-nilai yang diperoleh dari langkah 1 di substitusikan ke persamaan logistik

$$\frac{dP}{dt} = m\left(1 - \frac{P}{K}\right)P$$
$$= 0{,}02\left(1 - \frac{P}{20.000.000}\right)P$$

Diketahui$\frac{dP}{dt} = 0{,}02\left(1 - \frac{P}{20.000.000}\right)P$dengan nilai awal $P(0) = 7.494.701$ Pada interval [1,15] dengan ukuran langkah $h = 1$. Untuk memperoleh solusi awal digunakan metode Rungge-Kutta.

Tabel 3: Solusi awal Menggunakan Metode Rugge-Kutta pada persamaan logistik

r	t_r	$h = 1$	
		P_r	$P' = f(t,P) = 0{,}02\left(1 - \frac{P}{20.000.000}\right)P$
0	1	7.494.701	93.723,47692
1	2	7.588.656,732	94.185,42365
2	3	7.683.066,664	94.631,81992
3	3	7.777.915,079	95.062,33861

Kemudian Menentukan solusi numerik dengan metode Adams-Bashforth

Setelah mendapatkan nilai-nilai $f_r(x_r, y_r)$selanjutnya di subsitusi ke persamaan Adams-Bashforth,

Untuk $r = 3$ $P_3 = 7.777.915{,}079$

$$P_{3+1} = P_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0)$$

$$P_4^{(0)} = 7.777.915{,}079 + \frac{1}{24}(55(95.062{,}33861) - 59(94.631{,}81992) + 37(94.185{,}42365) - 9(93.723{,}47692)) = 7.873.185{,}939$$

Setelah mendapatkan nilai-nilai $f_{r+1}^{(0)}$ selanjutnya di subsitusi ke persamaan Adams-Moulton

$$f_4^{(0)}\left(t_4, P_4^{(0)}\right) = f_4(4\,; 7.873.185{,}939)$$

$$= 0{,}02\left(1 - \frac{7.873.185{,}939}{20.000.000}\right) 7.873.185{,}939$$

$$= 95.476{,}66195$$

Untuk $r = 3$, $t_4 = 4$ dan $P_3 = 7.777.915{,}079$

$$P_{3+1}^{(1)} = P_3 + \frac{h}{24}\left(f_1 - 5f_2 + 19f_3 + 9f_4^{(0)}\right)$$

$$P_4^{(1)} = 7.777.915{,}079 + \frac{1}{24}\big(94.185{,}42365 - 5(94.631{,}81992)\big) + 19(95.062{,}33861) + 9(95.476{,}66195)\big)$$

$$= 7.873.185{,}943$$

Dihitung galat relatifnya dan dibandingkan dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 5 \times 10^{-9}$

$$\frac{\left|P_4^{(1)} - P_4^{(0)}\right|}{\left|P_4^{(1)}\right|} = \frac{|7.873.185{,}943 - 7.873.185{,}939|}{|7.873.185{,}943|}$$

$$= 4{,}45674 \times 10^{-10}$$

Dari hasil tersebut terlihat bahwa galat relatif lebih kecil dari kriteria pemberhentian.

$$4{,}45674 \times 10^{-10} < 5 \times 10^{-9}$$

maka iterasi dilanjutkan sampai iterasi ke-15

Tabel 4 Solusi Numerik Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton pada persamaan logistik untuk pertumbuhan penduduk Provinsi Sul-Sel

Tahun	t_r	$h = 1$		Galat Relatif
		$P_r^{(0)}$	P_r (jiwa)	
2005	0		7.494.701	
2006	1		7.588.656,732	
2007	2		7.683.066,664	
2008	3		7.777.915,079	
2009	4	7.873.185,939	7.873.185,943	$4{,}45674 \times 10^{-10}$
2010	5	7.968.862,899	7.968.862,903	$4{,}65689 \times 10^{-10}$
2011	6	8.064.929,303	8.064.929,303	$4{,}78152 \times 10^{-10}$
2012	7	8.161.368,206	8.161.368,21	$4{,}96295 \times 10^{-10}$
2013	8	8.258.162,382	8.258.162,386	$5{,}10227 \times 10^{-10}$
2014	9	8.355.294,334	8.355.294,338	$5{,}2373 \times 10^{-10}$
2015	10	8.452.746,309	8.452.746,313	$5{,}36309 \times 10^{-10}$
2016	11	8.550.500,307	8.550.500,311	$5{,}47839 \times 10^{-10}$
2017	12	8.648.538,095	8.648.538,1	$5{,}58346 \times 10^{-10}$
2018	13	8.746.841,223	8.746.841,228	$5{,}67813 \times 10^{-10}$
2019	14	8.845.391,029	8.845.391,035	$5{,}76231 \times 10^{-10}$
2020	15	8.944.168,665	8.944.168,67	$5{,}83596 \times 10^{-10}$

Semua solusi numerik yang ada pada Tabel 4.4 telah memenuhi kriteria pemberhentian $\varepsilon = 5 \times 10^{-9}$. Terlihat bahwa semakin bertambahnya tahun, maka jumlah penduduk di Provinsi Sul-Sel semakin meningkat.

Pada persamaan logistik ukuran langkah h yang dipilih adalah 1 dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 5 \times 10^{-9}$. Pada penyelesaian awal dengan menggunakan metode Runge-Kutta untuk mencari tiga solusi awal yaitu $P_1 = 7.588.656{,}732$, $P_2 = 7.683.066{,}664$, dan $P_3 = 7.777.915{,}079$. Tiga solusi awal tersebut di substitusikan ke persamaan logistik untuk memperoleh nilai-nilai $f_r,\ f_{r-1},\ f_{r-2}, f_{r-3}$. Metode Adams-Bashforth untuk memprediksi nilai $P_{r+1}^{(0)}$ dengan $r = 3,4,\dots,n$ selanjutnya nilai prediksi tersebut diperbaiki menggunakan metode Adams-Moulton P_{r+1} dengan ukuran langkah $h = 1$. Galat relatifnya lebih kecil dari kriteria pemberhentian maka iterasi dilanjutkan sampai iterasi ke-n, Semua solusi numerik yang ada pada Tabel 4.3 telah memenuhi kriteria pemberhentian $\varepsilon = 5 \times 10^{-9}$. Terlihat bahwa semakin bertambahnya tahun, maka jumlah penduduk di Provinsi Sulawesi Selatan semakin meningkat.

4. KESIMPULAN

Metode Adams-Bashforth-Moulton pada persamaan logistik dalam memprediksi jumlah penduduk di Provinsi Sulawesi Selatan menunjukkan bahwa setiap tahunnya jumlah penduduk bertambah. Dimana hasil pertambahan penduduk di Provinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2015 bertambah 97.452 Jiwa, tahun 2016 bertambah 97.754 Jiwa, tahun 2017 bertambah 98.037 Jiwa, tahun 2018 bertambah 98.303 Jiwa, tahun 2019 bertambah 98.549 Jiwa dan tahun 2020 bertambah 98.777 Jiwa.

DAFTAR PUSTAKA

Bayu Prihandono, Apriadi, dan Evi Noviani, "*Metode Adams-Bashforth-Moulton dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Non Linear*", Buletin Ilmiah Mat. Stat dan terapanya, no. 2(2014):

Sri Redjeki P, "*Persamaan Diferensial*" (Diktak Kuliah MA2271 Metode Matematika di Prodi Matematika Institut Teknologi Bandung). 2011

Kartono, *Persamaan Diferensial Biasa (Model Matematika Fenomena Perubahan),*

Rinaldi Munir, *Metode Numerik,*. Bandung: INFORMATIKA, 2003

Didit Budi Nugroho, *Diktat Kuliah (Metode Numerik.* Salatiga: Universitas Kristen Satya Wacana, 2009

P.Buyung Kosasih, *Komputasi Numerik Teori dan Aplikasi.* Yogyakarta: ANDI, 2006

Richard Bronson dan Gabriel B. Costa, *Persamaan Diferensial* Jakarta: Erlangga, 2007