PEWARNAAN SISI PADA GRAF YANG BERHUBUNGAN DENGAN SIKEL

Wahyuni Abidin, S.Pd., M.Pd

Jurusan Matematika,
Fakultas Sains dan Teknologi, UINAM
E-Addr.

Masni

Mahasiswa Jurusan Matematika UINAM

Info:

Jurnal MSA Vol. 2 No. 1
Edisi: Januari – Juni 2014
Artikel No.: 10
Halaman: 69 - 75
ISSN: 2355-083X
Prodi Matematika UINAM

ABSTRAK

Pewarnaan sisi pada graf *G* adalah pemberian warna untuk setiap sisi pada graf sehingga tidak ada dua sisi yang dipisahkan oleh sebuah titik mempunyai warna sama. Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk mengetahui rumus umum pewarnaan sisi pada graf yang berhubungan dengan sikel berdasarkan pewarnaan sisi dengan algoritma *welch powell*. Dalam kajian ini, penulis menggunakan graf yang berhubungan dengan sikel yakni graf roda, graf gear, graf helm, graf helm tertutup dan graf bunga. Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bahwa rumus umum untuk pewarnaan sisi pada graf yang berhubungan dengan sikel yaitu rumus umum untuk graf Roda adalah $\chi(W_n) = n$. Rumus umum pewarnaan sisi pada graf Gear adalah $\chi(G_n) = n$, sedangkan pada graf Helm adalah $\chi(H_n) = \text{n} + 1$ untuk $n = 3$, $\chi(H_n) = \text{n}$ untuk $n > 3$. Rumus umum pewarnaan sisi pada graf Helm Tertutup adalah $\chi(\widehat{H}_n) = \text{n} + 1$ untuk $n = 3$, $\chi(\widehat{H}_n) = \text{n}$ untuk $n > 3$, sedangkan pada graf Bunga adalah $\chi(F_n) =$ 2n.

Kata Kunci: Pewarnaan Sisi, Graf, Sikel, Welch Powell dan Indeks Kromatik

1. PENDAHULUAN

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks. Hal ini disebabkan oleh kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, serta matematika merupakan suatu proses teori dan aplikasi ilmu yang memberikan suatu bentuk dan manfaat. Matematika juga merupakan ratu dari segala ilmu pengetahuan, sehingga matematika tidak dapat dilepaskan dari berbagai ilmu yang ada dan matematika juga membantu dalam kehidupan sehari-hari. Perhitungan dalam matematika menjadi sebuah dasar bagi desain ilmu teknik, fisika, kimia maupun disiplin ilmu yang lainnya. Para ahli dari berbagai disiplin ilmu, menggunakan matematika untuk berbagai keperluan yang berkaitan dengan keilmuan mereka. Misalnya para ahli fisika menggunakan matematika untuk mengukur kuat arus listrik, merancang pesawat ruang angkasa, menganalisis gerak, mengukur kecepatan, dan lain-lain.

Dewasa ini semakin banyak muncul penggunaan model matematika maupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisa model atau rumusan teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya.

Terkait dengan pernyataan di atas, pewarnaan sisi pada graf merupakan salah satu dari materi pada teori graf yang berkembang dan mendapat perhatian saat ini. Dengan mengkaji dan menganalisis suatu pewarnaan sisi pada graf tertentu, akan didapat suatu perumusan yang akan lebih memudahkan proses pengaplikasiannya ke dunia nyata.

Pewarnaan sisi dari graf G adalah sebuah pemetaan warna-warna ke titik-titik dari G sedemikian hingga sisi yang terhubung langsung mempunyai warna-warna yang berbeda. Graf G berwarna n jika terdapat sebuah pewarnaan dari G yang menggunakan n warna. Dalam pewarnaan sisi erat kaitannya dengan penentuan indeks kromatik, yaitu masalah menentukan banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai sisi-sisi pada graf sehingga dua sisi yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda.

Bahasan mengenai pewarnaan pada graf tidak hanya difokuskan pada beberapa jenis graf itu sendiri, akan tetapi juga dapat diaplikasikan pada kehidupan sehari-hari yang dapat membantu dan memudahkan kita. Diantaranya pada pemasangan kabel telefon, pada masalah penjadwalan, pewarnaan peta dan masih banyak lagi. Untuk pewarnaan sisi pada beberapa jenis graf, contohnya adalah pewarnaan sisi pada graf roda, graf gear, graf helm, graf helm tertutup, dan graf bunga.

Beberapa kajian terdahulu telah membahas tentang pewarnaan titik pada graf tertentu seperti yang dibahas oleh Shofiyatul Hasanah tahun 2007 dalam tulisannya yang berjudul aplikasi pewarnaan graf terhadap penjadwalan kuliah di jurusan matematika UIN Malang, dan Abdul Ghofurtahun 2008 dalam tulisannya yang berjudul pewarnaan titik pada graf yang berkaitan dengan sikel.

Ada beberapa pewarnaan dalam suatu graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Dalam penelitian ini penulis akan mengambil salah satu topik dari pewarnaan-pewarnaan pada graf tersebut yaitu pewarnaan sisi. Pewarnaan sisi adalah salah satu masalah mendasar pada graf, sehingga tidak ada dua sisi yang dipisahkan oleh sebuah titik mempunyai warna sama. Berbanding terbalik dengan perwarnaan titik yang tidak ada dua titik yang disambungkan oleh sebuah sisi yang memiliki warna yang sama.

Berdasarkan perbedaan tersebut, penulis tertarik mengambil pewarnaan sisi untuk diaplikasikan kembali ke graf yang berhubungan dengan sikel untuk mengetahui apakah indeks kromatik yang akan dihasilkan pewarnaan sisi akan sama dengan pewarnaan titik. Sehingga penulis dapat merumuskan judul yang diteliti yaitu "**Pewarnaan Sisi pada Graf yang Berhubungan dengan Sikel**".

2. TINJAUAN PUSTAKA

Definis Graf

Definisi 2.1. *Graf adalah diagram yang terdiri dari noktah-noktah yang disebut titik dan dihubungkan oleh garis-garis yang disebut sisi, serta setiap sisi menghubungkan tepat dua titik.*

Graf G adalah pasangan $\big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G)$ himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyak unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$dan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka orde dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q.

Definisi 2.2. *Graf $\boldsymbol{H}$ disebut subgraf dari $\boldsymbol{G}$ jika himpunan titik di $\boldsymbol{H}$ adalah subset dari himpunan titik-titik di $\boldsymbol{G}$ dan himpunan sisi-sisi di $\boldsymbol{H}$ adalah subset dari himpunansisi di $\boldsymbol{G}$. Dapat ditulis $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{H})\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G})$ dan $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{G})$. Jika $\boldsymbol{H}$ adalah subgraf $\boldsymbol{G}$, maka dapat ditulis $\boldsymbol{HG}$.*

Graf Terhubung

Definisi 2.3. *Sisi $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ dikatakan menghubungkan titik $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ Jika $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ adalah sisi di graf $\boldsymbol{G}$, maka $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ disebut terhubung langsung (adjacent), $\boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{e}$ serta $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{e}$ disebut terkait langsung (incident), dan titik $\boldsymbol{u}$dan $\boldsymbol{v}$ disebut ujung dari $\boldsymbol{e}$. Dua sisi berbeda $\boldsymbol{e_1}$ dan $\boldsymbol{e_2}$ disebut terhubung langsung (adjacent), jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ akan ditulis $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{uv}$.*

Algoritma Welch-Powell

Algoritma *Welch Powell* adalah suatu cara yang efisien untuk mewarnai sebuah graf G.

Langkah-langkah dalam algoritma *Welch Powell*

1. Urutkan sisi-sisi dari *G* dalam urutan jumlah sisi yang terhubung secara menurun. Urutan ini mungkin tidak unik karena beberapa sisi yang terhubung mungkin mempunyai jumlah yang sama.
2. Gunakan satu warna tertentu untuk mewarnai sisi pertama. Secara berurut, setiap sisi dalam tabel yang tidak terhubung langsung dengan sisi sebelumnya diwarnai dengan warna ini.
3. Ulangi langkah 2 di atas untuk sisi yang terhubung dengan urutan jumlah sisi terbesar yang belum diwarnai.
4. Ulangi langkah 3 di atas sampai semua sisi dalam tabel terwarnai

SIKEL

Sikel merupakan sebuah jejak tertutup yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda.

Graf Sikel

Definisi 2.4. *Graf sikel adalah graf yang terdiri dari satu sikel. Graf sikel dinotasikan* $\boldsymbol{C_n}$*, dimana* $\boldsymbol{n}$ *itu adalah jumlah titik.*

Graf yang Berhubungan dengan Sikel

1. Graf Roda (*Wheel Graph*)

Definisi 2.5. *Graf Roda* $\boldsymbol{W_n}$*adalah graf yang memuat sikel yang setiap titik pada sikel terhubung langsung dengan titik pusat.*

Teorema 2.1. *Graf roda* $\boldsymbol{W_n}$ *memiliki* $\boldsymbol{n+1}$ *titik dan* $\boldsymbol{2n}$ *sisi.*

Graf Gear

Definisi 2.6. *Graf gear adalah graf roda dengan tambahan sebuah titik diantara tiap-tiap pasangan dari titik-titik graf yang terhubung langsung pada sikel luar.*

Teorema 2.2. *Graf gear* $\boldsymbol{G_n}$ *memiliki* $\boldsymbol{2n+1}$ *titik dan* $\boldsymbol{3n}$ *sisi.*

Graf Helm

Definisi 2.7. *Graf Helm* $\boldsymbol{H_n}$ *adalah graf yang didapatkan dari sebuah graf roda dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik di sikel luar.*

Teorema 2.3. *Graf Helm* $\boldsymbol{H_n}$ *memiliki* $\boldsymbol{2n+1}$ *titik dan* $\boldsymbol{3n}$ *sisi.*

Graf Helm Tertutup

Definisi 2.8. *Graf Helm Tertutup adalah graf yang diperoleh dari sebuah graf Helm dengan menghubungkan tiap titik anting-anting untuk membentuk sikel.*

Teorema 2.4. *Graf Helm* $\boldsymbol{\widehat{H}_n}$ *memiliki* $\boldsymbol{2n+1}$ *titik dan* $\boldsymbol{4n}$ *sisi.*

Graf Bunga (Flower Graph)

Definisi 2.9. *Graf Bunga adalah graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan tiap-tiap titik anting-anting ke titik pusat dari graf helm.*

Teorema 2.5. *Graf Bunga* $\boldsymbol{F_n}$ *memiliki* $\boldsymbol{2n+1}$ *titik dan* $\boldsymbol{4n}$ *sisi.*

Pewarnaan pada Graf

Ada tiga macam pewarnaan graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Tetapi dalam hal ini penulis hanya memfokuskan kajian tentang pewarnaan sisi.

Pewarnaan Titik (Vertex Coloring)

Definisi 2.10. *Pewarnaan titik adalah memberi warna pada titik-titik suatu graf sedemikian sehingga tidak ada dua titik terhubung langsung mempunyai warna yang sama.*

Pewarnaan Sisi (Edge Coloring)

Definisi 2.11. *Suatu pewarnaan sisi-k untuk graf* $\boldsymbol{G}$ *adalah suatu penggunaan sebagian atau semua* $\boldsymbol{k}$ *warna untuk mewarnai semua sisi di* $\boldsymbol{G}$ *sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda.*

Pewarnaaan Wilayah (Area Coloring)

Definisi 2.12. *Pewarnaan* $\boldsymbol{n}$ *wilayah merupakan pewarnaan graf* $\boldsymbol{G}$ *yang dapat diwarnai dengan* $\boldsymbol{n}$ *atau warna minimum, sehingga wilayah yang terhubung langsung dapat diwarnai dengan warna yang berbeda.*

3. METODE PENELITIAN

Adapun prosedur yang akan dilakukan pada penelitian ini untuk mencapai tujuan yang diinginkan adalah sebagai berikut:

1. Menggambarkan graf yang berhubungan dengan sikel.
2. Melakukan pewarnaan sisi pada graf yang berhubungan dengan sikel menggunakan algoritma *welch powell*.
3. Menghitung banyak warna sisi sebagai indeks kromatik.
4. Merumuskan indeks kromatik pada graf yang berhubungan dengan sikel secara umum kemudian memberikan solusi pada rumus tersebut berdasarkan gambar, teorema, dan definisi.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Merumuskan Indeks Kromatik pada Graf Roda

Berdasarkan hasil dari pewarnaan graf roda tersebut maka diperoleh:

$\chi(W_3) = 3;\ \chi(W_4) = 4;\ \chi(W_5) = 5\ ;\chi(W_6) = 6;\quad \chi(W_7) = 7;\quad \chi(W_8) = 8;\quad \chi(W_9) = 9;\ \chi(W_{10}) = 10;\ ...;\ \chi(W_k) = k;\ \dots\ ;\ \chi(W_{n-1}) = n - 1$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa rumus umum untuk graf roda adalah:

$$\chi(W_n) = n$$

Merumuskan Indeks Kromatik pada Graf Gear

Berdasarkan hasil dari pewarnaan graf gear tersebut maka diperoleh:

$\chi(G_3) = 3;\quad \chi(G_4) = 4;\quad \chi(G_5) = 5'\chi(G_6) = 6;\ \chi(G_7) = 7;\ \chi(G_8) = 8;\ \chi(G_9) = 9;\ \chi(G_{10}) = 10; \dots .\ \chi(G_k) = k; \dots\ \chi(G_{n-1}) = n - 1$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa rumus umum untuk graf gear adalah:

$$\chi(G_n) = n$$

Merumuskan Indeks Kromatik pada Graf Helm

Berdasarkan hasil dari pewarnaan graf helm tersebut maka diperoleh:

$$\chi(H_3) = 4$$
$$\chi(H_4) = 4$$
$$\chi(H_5) = 5$$
$$\chi(H_6) = 6$$
$$\chi(H_7) = 7$$
$$\chi(H_8) = 8$$
$$\chi(H_9) = 9$$
$$\chi(H_{10}) = 10$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\chi(H_k) = k$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\chi(H_{n-1}) = n - 1$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa rumus umum untuk graf helm adalah:

$$\chi(H_n) = \begin{cases} n + 1, & n = 3 \\ n, & n > 3 \end{cases}$$

Merumuskan Indeks Kromatik pada Graf Helm Tertutup

Berdasarkan hasil dari pewarnaan graf helm tertutup tersebut maka diperoleh:

$$\chi(\widehat{H}_3) = 4$$
$$\chi(\widehat{H}_4) = 4$$
$$\chi(\widehat{H}_5) = 5$$
$$\chi(\widehat{H}_6) = 6$$
$$\chi(\widehat{H}_7) = 7$$
$$\chi(\widehat{H}_8) = 8$$
$$\chi(\widehat{H}_9) = 9$$
$$\chi(\widehat{H}_{10}) = 10$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\chi(H_k) = k$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\chi(H_{n-1}) = n - 1$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa rumus umum untuk graf helm tertutup adalah:

$$\chi(\widehat{H}_n) = \begin{cases} n+1, & n = 3 \\ n, & n > 3 \end{cases}$$

Merumuskan Indeks Kromatik pada Graf Bunga

Berdasarkan hasil dari pewarnaan graf bunga tersebut maka diperoleh:

$$\chi(F_3) = 6$$
$$\chi(F_4) = 8$$
$$\chi(F_5) = 10$$
$$\chi(F_6) = 12$$
$$\chi(F_7) = 14$$
$$\chi(F_8) = 16$$
$$\chi(F_9) = 18$$
$$\chi(F_{10}) = 20$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\chi(F_k) = k$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\chi(F_{n-1}) = n-1$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa rumus umum untuk graf bunga adalah:

$$\chi(F_n) = 2\mathrm{n}$$

Pembahasan

Pewarnaan sisi dari graf G merupakan pemetaan warna-warna ke titik dari G, sedemikian sehingga sisi yang terhubung langsung, mempunyai warna yang berbeda, pewarnaan sisi erat kaitannya dengan pemetaan indeks kromatik. Untuk graf yang berhubungan dengan sikel di antaranya graf roda, graf gear, graf helm, graf helm tertutup, dan graf bunga. Memiliki kajian indeks kromatik yang berbeda-beda karena perbedaan struktur dari graf masing-masing. Sebagai syarat mutlak banyaknya indeks kromatik minimum dari pewarnaan graf yaitu $m \leq \chi(Gn) \leq m+1$, dengan m merupakan derajat maksimum dari graf G, maka untuk semua graf yang berhubungan dengan sikel (graf roda, graf gear, graf helm, graf helm tertutup dan graf bunga) hanya memenuhi indeks kromatik $\chi(Gn) = m$, karena semua graf yang berhubungan dengan sikel tidak memenuhi derajat maksimum untuk tiap titiknya.

Sebagai perbandingan indeks kromatik untuk kelima graf yang berhubungan dengan sikel maka terlihat graf roda dan graf gera memiliki bilangan kromatik yang sama, walaupun banyak titiknya berbeda namun derajat maksimum dari keduanya sama. Hal itu dikarenakan graf roda memeliki derajat maksimum yang diperoleh dari titik pusat yang terhubung kesemua titik (titik graf roda $= n+1$), sedangkan graf gear yang memiliki titik $2n+1$ hanya menghubungkan titik ke titik pusat sehingga keduanya memiliki derajat maksimum yang sama. Selanjutnya graf helm dan hel tertutup juga memiliki indeks kromatik yang sama, itu di karenakan derajat maksimumnya sama. Berbeda dengan graf gear dan graf roda, untuk graf helm dan graf helm tertutup pada $n = 3$, derajat maksimumnya tidak berada di tititk pusat dengan derajat maksimumnya adalah $n+1$ sehingga untuk $n = 3$, maka indeks kromatik $= 4$, sedangkan untuk $n > 3$ sama dengan graf roda dan graf gear yang derajat maksimumnya $= n$. Pada graf bunga yang memiliki $2n+1$, semua titik selain titik pusat terhubung langsung ke titik pusat sehunnga derajat maksimum dari graf bunga adalah $2n$, sehingga indeks kromatinya pun $2n$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa indeks kromatik dari graf yang berhubungan dengan sikel tergantung pada besarnya derajat maksimum dari tiap graf tersebut.

5. PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab IV, maka dapat diambil kesimpulan, bahwa rumus umum pewarnaan sisi pada graf yang berhubungan dengan sikel berdasarkan pewarnaan sisi dengan menggunakan algoritma *welch powell* sebagai berikut:

1. Rumus umum untuk jumlah pewarnaan sisi pada graf roda, adalah:

$$\chi(W_n) = n$$

2. Rumus umum untuk jumlah pewarnaan sisi pada graf gear, adalah:

$$\chi(G_n) = n$$

3. Rumus umum untuk jumlah pewarnaan sisi pada graf helm, adalah:

$$\chi(H_n) = \begin{cases} n+1, & n = 3 \\ n, & n > 3 \end{cases}$$

4. Rumus umum untuk jumlah pewarnaan sisi pada graf helm tertutup, adalah:

$$\chi(\widehat{H}_n) = \begin{cases} n+1, & n = 3 \\ n, & n > 3 \end{cases}$$

5. Rumus umum untuk jumlah pewarnaan sisi pada graf bunga, adalah:

$$\chi(F_n) = 2\text{n}$$

Saran

Pada penelitian ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah pewarnaan sisi pada graf yang berhubungan dengan sikel, antara lain Graf Roda, Graf Gear, Graf Helm, Graf Helm Tertutup, dan Graf Bunga yaitu penentuan indeks kromatiknya. Maka dari itu, untuk peneliti selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengaplikasikan hasil pewarnaan sisi ini pada suatu permasalahan yang dapat diselesaikan menggunakan pewarnaan sisi, terkhusus pada permasalahan yang berkaitan dengan graf yang berhubungan dengan sikel.

Azizah, Nilna Niswatin, Abdusakir, dkk. 2009 *Teori graf*. Malang: UIN Malang

Baizal Abdurahman ZK. 2002. *Matematika diskrit* Telkom: Sekolah Tinggi Teknologi Telkom

6. DAFTAR PUSTAKA

Budayasa I ketut. 2007. *Teori graph dan aplikasinya*. Unesa University Press

Fitria, Lala. 2007. *Pelabelan Super Sisi Ajaib (Super Edge Magic Labeling) padaGraph star K1, n (n bilangan asli).* UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan

Gallian, J. A. 2007."*Dynamic Survey DS6: Graph Labeling*." *Electronic J. Combinatorics*, DS6.http://mathworld.wolfram.com/www.combinatori cs.org/Surveys/ds6. pdf. Diakses pada tanggal 22 Juni 2013

Gofur, Abdul *Pewarnaan Titik Pada Graf Yang berkaitan Dengan Sikel* http://lib.uin-malang.ac.id/files/thesis/fullchapter/0321 0049.pdf (diakses pada tanggal 29 Juli 2013)

Hasanah, Shofiyatul. 2007. *Aplikasi Pewarnaan Graf Terhadap Penjadwalan Kuliah Di Jurusan Matematika UIN Malang*.UIN Malang: Skripsi

Hasanah, Syifaul. 2008. *Digraf Dari Tabel Cayley Grup Dihedral*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan

Imam KokokWahyuniWijaya. 2008. *Pewarnaan pada Graf Buku dan Graf Tangga*http://lib.uin-malang.ac.id/? mod=th_detail&id=03510021 (diakses pada tanggal 29 Juli 2013). h.26

Kerami, Djati dan Cormentyna Sitanggang. 2003. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka

Lipschutz, Seymour Marc Larcs Lipson. 2002. *Matematika Diskrit 2*. Jakarta: Salemba Teknika

Munir, Rinaldi. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung

Nurhayati, Dwi Mei. 2007. *Aplikasi Metode Takagi-Sugenopada Cara Kerja Mesin Cuci*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

Oktamira.2008. *Pewarnaan Sisi Pada Grafh Bukti http://oktamira.files.wordpress.com /2010/12/pewarnaan-sisipada-graph.docx.* Diakses pada tanggal 22 Agustus 2013

Priatna Nanang. 2008. *Pewarnaan Graf (Pama4208/Modul 6)*. Malang: IKIP Malang

Purwanto, 1998.*MatematikaDiskrit*. Malang: IKIP Malang.

Rahman, Afzalur. 1992. *Al Qur'an SumberIlmuPengetahuan*. Jakarta: RinekaCipta.

Suryanto.1986. *Materi Pokok Pengantar Teori Graph*. Jakarta:Karunika Universitas terbuka

Wibisono, Samuel. 2004. *Matematika Diskrit Edisi Pertama*. Yogyakarta: GrahaIlmu