Nilai Konsentrasi Unsur Paracetamol Dan Kafein Yang Membentuk Sistem Persamaan Taklinear Dengan Metode Broyden

Ilham Syata
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, ilham.syata@uin-alauddin.ac.id

Putri Nurrabiah Suriadi
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, nurrabiahputri@gmail.com

St. Nur Humairah Halim
Universitas Muhammadiyah Makassar,irahumairah08@gmail.com

Abstrak, Tujuan penelitian ini untuk mencari nilai konstentrasi unsur paracetamol dan kafein. Langkah-langkah penelitian yaitu membentuk model matematika yang berbentuk system persamaan taklinear, menentukan nilai awal, mencari solusi system persamaan taklinear dengan metode broyden, mengulangi iterasi sampai mendapatkan galat yang kecil. Hasil penelitian diperoleh nilai konsentasi yaitu unsur paracetamol sebesar 12713,66 ppm dan kafein sebesar 6516,51 ppm

Kata Kunci: Konsentrasi paracetamol dan kafein, metode Broyden

1. PENDAHULUAN

Metode numerik adalah Teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara diskretisasi [1]. Pemakaian metode numerik sangat banyak digunakan karena mampu menyelesaikan model matematika yang rumit dan sulit diselesaikan secara analitik. Metode numerik telah dikembangkan oleh ilmuan sehingga diperoleh banyak metode yang dapat menyelesaikan kasus yang sama, serta dibutuhkan teknologi khususnya dibidang komputer untuk memudahkan dalam perhitungan. Metode numerik dapat digunakan dalam banyak bidang seperti matematika, teknik (sipil, mesin, elektro, kimia dan sebagainya), kedokteran, ekonomi, sosial dan bidang ilmu lainnya [2,3]. Sistem persamaan linear dan non linear dapat membentuk model yang sangat kompleks dan sulit diselesaikan secara analitik.

Metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan linear dan non linear tersebut, baik dalam bentuk aljabar, polynomial ataupun transcendental, yaitu dengan mencari akar-akar persamaan nonlinear secara numerik. Setiap penyelesaian numerik dilakukan dengan perkiraan berurutan (iterasi), sehingga setiap hasil yang didapat lebih teliti dari perkiraan sebelumnya. Dengan melakukan sejumlah prosedur iterasi yang dianggap cukup, maka akan didapat hasil perkiraan yang mendekati hasil yang sebenarnya dengan toleransi kesalahan (ε) yang ditentukan. Persamaan non linear juga dapat ditemukan pada bidang kimia yaitu untuk melakukan perhitungan terhadap nilai konsentrasi unsur kimia ataupun yang lainnya. Pada bidang elektro, bentuk-bentuk persamaan nonlinear tersebut salah satunya diimplementasikan dalam suatu rangkaian listrik. Serta bidang lainnya yang menggunakan bentuk-bentuk dari persamaan nonlinear. Ada dua metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan, yaitu metode analitik dan metode numerik [[5,7,9].

Metode analitik adalah suatu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu persoalan matematika secara tepat. Sedangkan metode numerik adalah suatu metode yang dapat digunakan untuk memecahkan suatu persoalan matematika dengan pen dekatan numerik [5,7,9]. Metode analitis dapat memberikan hasil yang eksak atau pasti dari suatu persamaan. Namun, ternyata banyak terdapat model matematis yang tidak bisa diselesaikan dengan metode analitis.

Misalnya persamaan nonlinear dengan pangkat lebih dari 3 akan sangat rumit bila harus diselesaikan dengan metode analitis. Dengan kelemahan yang dimiliki oleh metode analitik dimana hanya model matematis tertentu yang dapat diselesaikan, maka dikembangkanlah penyelesaian dengan metode numerik untuk dapat mendekati penyelesaian eksak. Ada beberapa metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu system persamaan nonlinear, Salah satunya menggunakan metode

Broyden [6]. Metode Broyden merupakan pengembangan dari metode Secant untuk variabel yang lebih dari satu.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Matriks

Definisi:

Matriks adalah kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang, serta termuat diantara sepasang tanda kurung [3]. Secara umum, suatu matriks dituliskan sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Suatu matriks tersusun atas baris dan kolom, Jika matriks tersusun atas m baris dan n kolom maka dikatakan matriks tersebut berukuran (berodo) m x n. penulisan matriks biasanya menggunakan huruf besar A, B, C dan seterusnya, Sedangkan penulisan matriks beserta ukurannya (matriks dengan m baris dan n kolom) adalah A_{mxn}, B_{mxn} dan seterusnya.[4]

Berikut ini beberapa operasi Matriks

a. Penjumlahan (addition)

Jika A dan B adalah sembarang dua matriks yang ukurannya sama maka jumlah A+B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan entri-entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}$$

b. Pengurangan (subtraction)

Jika A dan B adalah sembarang dua matriks yang ukurannya sama maka jumlah A-B adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri yang bersesuaian pada matriks B dari entri-entri pada matriks A

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33} \end{bmatrix}$$

c. Perkalian Skalar Pada Matriks

Jika A adalah Suatu matriks dan c suatu scalar, maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalihkan masing-masing entri dari A oleh c

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \to c\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

$$= \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{bmatrix}$$

d. Perkalian Dua Matriks

Matriks A_{mxn} dapat dikalikan dengan matriks B_{pxq} jika dan hanja jika banyaknya kolom pada matriks A sama dengan banyaknya baris pada matriks B (n=p).

$$A_{mxn}B_{nxp} = A_{mxq}$$

$$A = \left[a_{ij}\right]_{mxn} dan \ = \left[b_{ij}\right]_{nxq} maka$$

$$C = \left[a_{ij}\right]_{mxn} dengan \ C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

e. Transpose Dari Suatu Matriks

Pada suatu matriks $A = \left(a_{ij}\right)$ berukuran (mxn), maka transpose dari A adalah matriks A^T berukuran (nxm) yang didapatkan dari A dengan menuliskan baris ke-I dari A, i = 1,2,…,m sebagai koliom ke-I dari A^T.dengan kata lain: $A^T = (a_{ji})$ Transpose dari suatu matriks adalah mengubah komponen-komponen dalam matriks, dari yang baris menjadi kolom, dan yang kolom di ubah menjadi baris [4]

2.1 Vektor

Definisi

Vector adalah suatu potongan (ruang, segmen) garis yang mempunyai arah. [4]

- Penulisan vector
  1. Vektor posisi: Ditulis dalam notasi vector terhadap titik acuan.

Contoh: Vektor posisi titik A dari 0 adalah $\overrightarrow{0A}$

2. Vektor Basis: ditulis dalam vector satuan

   Contoh: $\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{xi} + \boldsymbol{yj} + \boldsymbol{zk}$

3. Vektor Kolom

   $$\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$$

4. Vektor Baris

   $$\vec{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$$

- Vektor pada Bidang dan Ruang

1. Vektor basis dapat ditentukan dengan mengitung vector satuan mulai dari ujung ke pangkal vector
2. Vektor Basis AB dengan koordinat titik $A(x_1, y_1, z_1)\ dan$

   $B(x_1, y_1, z_1)$ dapat dihitung:

   Dalam bidang

   $$\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

   Dalam Ruang

   $$\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

3. Panjang vector

   $$|\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
   $$|\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- Operasi Vektor

4. Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

   Dengan Vektor basis dengan $a(x_1, y_1, z_1)\ dan\ b(x_1, y_1, z_1)$

   $$\bar{b} + \bar{a} = \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \\ z_2 + z_1 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} - \bar{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

5. Perkalian Skalar dan Vektor

   $$k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$$
   $$k.\bar{a} = k.|\bar{a}|$$

6. Perkalian Skalar/titik

   $$\bar{a}\,.\,\bar{b} = |a||b|\cos\theta$$

7. Perkalian Skalar

   Dengan Vektor basis dengan $a(x_1, y_1, z_1)\ dan\ b(x_1, y_1, z_1)$

   $$\bar{a}\,.\,\bar{b} = (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$

- Ruang Vektor

  Himpunan tak kosong V merupakan ruang vector apabila $\forall x, y, z \in V$ Sedemikian hingga memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut

1. $x + y \in V$
2. $x + y = y + x$
3. $(x + y) + z = x + (y + z)$
4. Terdapat $0 \in V$ sedemikian hingga $0 + V = V + 0 = 0$
5. Terdapat $-x \in V$ Sedemikian hingga $0 + V = V + 0 = 0$
6. $ax \in V$
7. $a(x + y) = ax + ay\ dan\ (a + b)x = ax + bx$
8. $(ab)x = a(bx)$
9. $lx = x$

[4]

2.2 Sistem Persamaan Linear

Bentuk umum sistem m buah persamaan linear dengan n buah variabel dapat ditulis sebagai.

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

Dimana $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ adalah variabel yang belum diketahui, $a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{mn}$ adalah koefisien sistem dan $b_1, b_2, \cdots, b_m$ adalah nilai konstan. Sistem Persamaan Linear dapat diubah dalam bentuk matriks dengan persamaan:

$Ax = b$ [4,8,9]

Dimana A adalah matriks m*n, x adalah vector kolom dengan n buah entri dan b adalah vektor kolom dengan m buah entri

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad [5]$$

2.3 Sistem Persamaan Tak Linear

Sistem persamaan non linear adalah himpunan m persamaan non-linear, dengan m > 1. Sistem persamaan non linear dengan m persamaan dan n variabel secara umum berbentuk:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$
$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$
$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Setiap fungsi $f_i\ dengan\ i = 1,2, \dots, n$ merupakan pemetaan vector $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ dari $R^n\ ke\ R$ Sistem ini dapat ditulis dalam bentuk lain dengan mendefinisikan fungsi F yakni pemetaan dari $R^n\ ke\ R$ yang dapat ditulis sebagai:

$\boldsymbol{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$
$= \left(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\right)^t$
$= 0$

Dengan menggunakan notasi vector, Sistem di atas dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

Fungsi $f_1, f_2, \dots, f_m$ disebut koordinat fungsi **F.**
Contoh Sistem persamaan non linear

$$3x_1 - cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1{}^2 - 81(x_2 + 0.i)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$e^{1x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0 \text{ [6]}$$

Persamaan non linear adalah persamaan yang pangkat variabelnya tidak sama dengan satu atau memuat salah satu fungsi trigonometri, hiperbola, transcendental. Adapun bentuk umum fungsi polynomial sebagai berikut:

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

Dimana:
$a_0 \dots . a_n$ → merupakan bilangan riil
n → merupakan pangkat polynomial
[4]

2.4 Metode Broyden

Metode Broyden merupakan pendekatan metode Newton-Raphson dengan perkiraan matriks Jacobian yang digunakan untuk iterasi yang pertama. Metode Broyden merupakan metode yang paling sederhana dari metode Quasi-Newton. Metode Broyden ini merupakan pengembangan dari metode Secant untuk variabel yang lebih dari satu. Adapun algoritma metode broyden yaitu

a Mencari Hitung nilai F(X_1) dengan subsitusi nilai iterasi 1 (X_1)
b Hitung nilai a dan b dengan rumus
  a_n = F(X_{n+1})- F(X_n) , n = 0, 1, 2, 3,…
  b_n = X_{n+1}- X_n , n = 0, 1, 2, 3,…
c. Mencari invers matriks $J(X_{n+1})^{-1}$ dengan teorema Sherman-Morisson

$$\mathrm{J}(\mathrm{X}_{n+1})^{-1} = \mathrm{J}(\mathrm{X}_n)^{-1} \times \frac{(\mathrm{b}_n - \mathrm{J}(\mathrm{X}_n)^{-1}\mathrm{a}_n)\mathrm{b}_n^t \mathrm{J}(\mathrm{X}_n)^{-1}}{\mathrm{b}_n^t \mathrm{J}(\mathrm{X}_n)^{-1}\mathrm{a}_n}$$

  n=0, 1, 2, …
d. Hitung nilai iterasi n+1 dengan rumus
  $X_{n+1} = X_n - J(X_n)^{-1}.F(X_n)$, n=1, 2, 3,…
e. Ulangi langkah 3 sampai F(X) ≈ 0

[6]

3. METODOLOGI

Penelitian ini merupakan penelitian terapan. Adapun langkah-langkah penelitian sebagai berikut:

1. Membentuk model matematika system persamaan tak linear
2. Menentukan nilai tebakan awal pada masing-masing variable
3. Menentukan nilai iterasi 1 dengan menggunakan metode newton rapshon
4. Hitung iterasi n+1 dengan metode broyden
5. Ulangi iterasi sampai F(X) ≈ 0

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Model

Dari hasil Eksperimen yang telah dilakukan yaitu mengukur konsentrasi larutan yang terdiri dari parasetamol dan kafein, Diasumsikan bahwa untuk parasetamol dan kafein didapatkan hubungan absorban A terhadap konsentrasi c mengikuti hubungan polynomial sebagai berikut

$$A = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + a_3 c^3$$

Konstanta $a_{0,} a_1, a_2, a_3$ diperoleh dari data kalibrasi yang disajikan pada table, dengan Hubungan antara absorban dan konsentrasi dari parasetamol dan kafein untuk berbagai panjang gelombang (lambda)

Tabel 4.1. Hubungan antara absorban dan konsentrasi dari parasetamol dan kafein untuk berbagai panjang gelombang [2]

Komponen	Lambda (nm)	a_0	a_1	a_2	a_3
Parasetamol	272,2	1,83E-03	1,44E-04	-4,99E-08	0
	249,1	5,38-03	6,53E-05	0	0
Kafein	272,2	-3,73E-04	8,95E-05	-9,62E-08	0
	249,1	1,09E-03	4,36E-05	-2,48E-8	0

Tabel 4.2. Hasil pengukuran absorban dari satu sampel [2]

No	Lamda(nm)	Absorban
1.	272,2	0,073
2.	249,1	0,054

Misalkan x_1 adalah variable untuk Konsentrasi Parasetamol dan x_2 adalah variable untuk Konsentrasi Kafein, Kemudian dari Data diatas pada panjang gelombang 272,2 nm dan 249,1 nm dapat diperoleh sistem persamaan non linear dengan dua variable sebagai berikut:

$$1{,}83\times10^{-3}+1{,}44\times10^{-4}x_1 - 4{,}99\times10^{-8}{x_1}^2 - 3{,}73\times10^{-4}+8{,}95\times10^{-5}x_2 - 9{,}62\times10^{-8}{x_2}^2 + 3{,}49\times10^{-11}{x_2}^3 = 0{,}073$$

$$5{,}38\times10^{-3}+6{,}53\times10^{-5}x_1+1{,}09\times10^{-3} + 4{,}36\times10^{-5}x_2 - 2{,}48\quad\times10^{-8}{x_2}^2 = 0{,}054$$

ITERASI 1

Langkah 1: Sistem Persamaan non linear diatas dapat ditulis sebagai berikut:

$$F(x_1,x_2) = -0{,}071543+1{,}44\times10^{-4}x_1 + 8{,}95\times10^{-5}x_2 - 4{,}99\times10^{-8}{x_1}^2 - 9{,}62\times10^{-8}{x_2}^2 + 3{,}49\times10^{-11}{x_2}^3 = 0$$

$$G(x_1,x_2) = -0{,}04753+6{,}53\times10^{-5}x_1 + 4{,}36\times10^{-5}x_2 - 2{,}48\quad\times10^{-8}{x_2}^2 = 0$$

Sistem Persamaan tersebut kemudian digunakan untuk menentukan konsentrasi paracetamol dan kafein pada suatu campuran yang mengandung keduannya Dengan menggunakan Konsentrasi awal 10000 ppm parasetamol dan 6000 ppm kafein maka sistem tersebut dapat diselesaikan secara numeric metode Newton Rapshon

Langkah 2: Menentukan nilai tebakan awal $x_1\ dan\ x_2$

Yaitu: $x_{1_0} = 10000 \quad dan \quad x_{2_0} = 6000$

Langkah 3: Mencari nilai fungsi dari kedua persamaan dengan nilai tebakan awal $x_{1_0} = 10000\ dan\ x_{2_0} = 6000$ yaitu

$$F(10000{,}6000) = -0{,}071543 + 1{,}44\times10^{-4}(10000) + 8{,}95\times10^{-5}(6000) - 4{,}99\times10^{-8}(10000)^2 - 9{,}62\times10^{-8}(6000)^2 + 3{,}49\times10^{-11}(6000)^3 = 9{,}9066\times10^{-1}$$

$$G(10000{,}6000) = -0{,}047{,}53 + 6{,}53\times10^{-5}(10000) + 4{,}36\times10^{-5}(6000) - 2{,}48\quad\times10^{-8}(6000)^2 = -2{,}573\times10^{-2}$$

Langkah 4: Mencari Turunan-turunan Fungsi tersebut terhadap masing-masing variabelnya yaitu

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 1{,}44 \times 10^{-4} - 9{,}98 \times 10^{-8} x_1$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 6{,}53 \times 10^{-5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 8{,}95 \times 10^{-5} - 19{,}24 \times 10^{-8} x_2 + 10{,}47 \times 10^{-11} {x_2}^2$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = 4{,}36 \times 10^{-5} - 4{,}96 \times 10^{-8} x_2$$

Langkah 5: Menghitung Turunan Dari Fungsi Yang Telah Didapat Dari Langkah Sebelumnya Dengan Menggunakan Nilai Tebakan Awal

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 1{,}44 \times 10^{-4} - 9{,}98 \times 10^{-8}(10000)$$

$$= -8.5 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 6{,}53 \times 10^{-5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 8{,}95 \times 10^{-5} - 19{,}24 \times 10^{-8}(6000) + 10{,}47 \times 10^{-11}(6000)^2$$

$$= 2{,}702 \times 10^{-3}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = 4{,}36 \times 10^{-5} - 4{,}96 \times 10^{-8}(6000)$$

$$= -2{,}54 \times 10^{-4}$$

Langkah 6: Menentukan deviasi dari setiap variabelnya menggunakan Aturan Cramer.

Nilai-Nilai Deviasi tersebut dimisalkan $r_{1_1}\, dan\, r_{2_1}$ untuk mencari nilai $r_{1_1}\, dan\, r_{2_1}$ Terlebih dahulu turunan dan Fungsi beserta nilai fungsi sistem persamaan non linear dibentuk menjadi:

$$\begin{bmatrix} -8.5 \times 10^{-4} & 2{,}702 \times 10^{-3} \\ 6{,}53 \times 10^{-5} & -2{,}54 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1_1} \\ r_{2_1} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 9{,}90666 \times 10^{-1} \\ -2{,}573 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Kemudian Perhitungan dilanjutkan dengan mencari matriks $A, A_1\, dan\, A_2$ dengan Aturan Cramer. Adapun hasilnya sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -8.5 \times 10^{-4} & 2{,}702 \times 10^{-3} \\ 6{,}53 \times 10^{-5} & -2{,}54 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -9{,}90666 \times 10^{-1} & 2{,}702 \times 10^{-3} \\ 2{,}573 \times 10^{-2} & -2{,}54 \times 10^{-4} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -8.5 \times 10^{-4} & -9{,}90666 \times 10^{-1} \\ 6{,}53 \times 10^{-5} & 2{,}573 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan matriks $A, A_1\, dan\, A_2$ dengan Aturan Cramer di atas Kemudian Dilanjutkan dengan mencari determinan matriks-matriks diatas untuk mendapatkan nilai $r_{1_1}\, dan\, r_{2_1}$ yaitu:

$$r_{1_1} = \frac{det A_1}{\det A}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} -9{,}90666 \times 10^{-1} & 2{,}702 \times 10^{-3} \\ 2{,}573 \times 10^{-2} & -2{,}54 \times 10^{-4} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -8.5 \times 10^{-4} & 2{,}702 \times 10^{-3} \\ 6{,}53 \times 10^{-5} & -2{,}54 \times 10^{-4} \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{\left((-9{,}90666 \times 10^{-1} \times -2{,}54 \times 10^{-4}) - (2{,}573 \times 10^{-2} \times 2{,}702 \times 10^{-3})\right)}{\left((-8.5 \times 10^{-4} \times -2{,}54 \times 10^{-4}) - (6{,}53 \times 10^{-5} \times 2{,}702 \times 10^{-3})\right)}$$

$$= 4514{,}48424$$

$$r_{2_1} = \frac{det A_2}{\det A}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} -8.5 \times 10^{-4} & -9{,}90666 \times 10^{-1} \\ 6{,}53 \times 10^{-5} & 2{,}573 \times 10^{-2} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -8.5 \times 10^{-4} & 2{,}702 \times 10^{-3} \\ 6{,}53 \times 10^{-5} & -2{,}54 \times 10^{-4} \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{\left((-8.5 \times 10^{-4} \times -2{,}573 \times 10^{-2}) - (6{,}53 \times 10^{-5} \times -9{,}90666 \times 10^{-1})\right)}{\left((-8.5 \times 10^{-4} \times -2{,}54 \times 10^{-4}) - (6{,}53 \times 10^{-5} \times 2{,}702 \times 10^{-3})\right)}$$

$$= 1059.314255$$

Langkah 7: Setelah mendapatkan nilai $r_{1_1}\, dan\, r_{2_1}$ di atas, akan dicari nilai pendekatan yang lebih tepat dari nilai awal, dengan menggunakan persamaan dibawah ini:

$$x_{1_1} = x_{1_0} + r_{1_1}$$

$$= 10000 + 4514{,}48424$$

$$= 14514{,}48424$$

$$x_{2_1} = x_{2_0} + r_{2_1}$$

$$= 6000 + 1059{,}314255 = 7059.314255$$

Nilai $x_{1_1} = 14514.48424$ dan $x_{2_1} = 7059.314255$ akan digunakan sebagai tebakan awal untuk langkah berikutnya

ITERASI 2:

Langkah 2: Menentukan nilai tebakan $x_1\ dan\ x_2$
Yaitu: $x_{1_1} = 14514.48424 \quad dan \quad x_{2_1} = 7059.314255$

Langkah 3: Mencari nilai fungsi dari kedua persamaan dengan nilai tebakan $x_{1_1} = 14514.48424\ \ dan\ x_{2_1} = 7059.314255$ yaitu

$$\begin{aligned} F&(14514.48424{,}7059.314255) \\ &= -0{,}071543 \\ &+ 1{,}44 \times 10^{-4}(14514.48424) \\ &+8{,}95 \times 10^{-5}(7059.314255) \\ &- 4{,}99 \times 10^{-8}(14514.48424)^2 \\ &- 9{,}62 \times 10^{-8}(7059.314255)^2 \\ &+ 3{,}49 \times 10^{-11}(7059.314255)^3 \\ &= -0{,}378522462 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G&(14514.48424{,}7059.314255) \\ &= -0{,}04753 \\ &+ 6{,}53 \times 10^{-5}(14514.48424) \\ &+4{,}36 \times 10^{-5}(7059.3142550) \\ &- 2{,}48 \quad \times 10^{-8}(7059.3142550)^2 \\ &= -2{,}7829238 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Langkah 4: Langkah selanjutnya yaitu dicari nilai dari $r_0\, dan\, s_0$ yang ada pada persamaan yang mana diperoleh cari pengurangan terhadap sedangkan diperoleh dari selisih terhadap yang akan digunakan ketika mencari invers dari matriks sebagai berikut:

$$r_0 = \begin{bmatrix} -3{,}78522462 \times 10^{-1} \\ -2{,}7829238 \times 10^{-2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9{,}9066 \times 10^{-1} \\ -2{,}573 \times 10^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}3692 \\ -2{,}09923 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$s_0 = \begin{bmatrix} 14514.48424 \\ 7059.314255 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10000 \\ 6000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4514{,}4824 \\ 1059{,}314255 \end{bmatrix}$$

Langkah 5: Langkah selanjutnya yaitu mencari invers dari matriks ${A_1}^{-1}$dengan menerapkan teorerna Sherman-Morrison. Adapun hasil invers dari matriks menggunakan teorema Sherman-Morrison adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A_1}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 9{,}7923 \times 10^{-7} & 0{,}48736 \\ -1{,}6548 \times 10^{-6} & 3{,}3964 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{\left(\begin{bmatrix} 4514{,}4824 \\ 1059{,}314255 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0{,}6673 \\ -7{,}0913 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 1{,}3546 \times 10^{-5} & -2{,}675 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 4514{,}4824 & 1059{,}314255 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}6673 \\ -7{,}0913 \times 10^{-7} \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 9{,}7923 \times 10^{-7} & 0{,}48736 \\ -1{,}6548 \times 10^{-6} & 3{,}3964 \times 10^{-4} \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} -4{,}8177 \\ -4{,}9399 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}3546 \times 10^{-5} & -2{,}675 \end{bmatrix}}{-3{,}0125}$$

$$= \begin{bmatrix} 9{,}7923 \times 10^{-7} & 0{,}48736 \\ -1{,}6548 \times 10^{-6} & 3{,}3964 \times 10^{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2{,}1663 \times 10^{-5} & -4{,}2778 \\ -2{,}2212 \times 10^{-5} & -4{,}3864 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2{,}0684 \times 10^{-7} & -3{,}79114 \\ -2{,}3868 \times 10^{-5} & -4{,}3861 \end{bmatrix}$$

Langkah 6 : Setelah didapatkan nilai ${A_1}^{-1}$ maka langkah selanjutnya yaitu hasil nilai invers tersebut disubstitusikan ke dalarn rumus pada persamaan, sehingga diperoleh nilai sebagai berikut

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} x_{1_2} \\ x_{2_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14514.48424 \\ 7059.314255 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} -2{,}0684 \times 10^{-7} & -3{,}79114 \\ -2{,}3868 \times 10^{-5} & -4{,}3861 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3{,}78522462 \times 10^{-1} \\ -2{,}7829238 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1_2} \\ x_{2_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14514.48424 \\ 7059.314255 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1800{,}76190 \\ 542{,}582734 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12713{,}72234 \\ 6516{,}73152 \end{bmatrix}$$

Nilai $x_{1_2} = 12713{,}72234$ dan $x_{2_2} = 6516{,}73152$ akan digunakan sebagai tebakan awal untuk langkah berikutnya

ITERASI 3:

Langkah 2: Menentukan nilai tebakan $x_{1_2}\ dan\ x_{2_2}$

Yaitu: $x_{1_2} = 12713{,}72234\ \ dan\ \ x_{2_2} = 6516{,}73152$

Langkah 3: Mencari nilai fungsi dari kedua persamaan dengan nilai tebakan $x_{1_2} = 12713{,}72234\ dan\ x_{2_2} = 6516{,}73152$ yaitu

$$\begin{aligned} F(12713{,}72234\ ;\ 6516{,}73152\ ) &= -0{,}071543 \times 10^{-3} \\ &+ 1{,}44 \times 10^{-4}(12713{,}72234\ ) \\ &+8{,}95 \times 10^{-5}(6516{,}73152\ ) \\ &- 4{,}99 \times 10^{-8}(12713{,}72234\ )^2 \\ &- 9{,}62 \times 10^{-8}(66516{,}73152\ )^2 \\ &+ 3{,}49 \times 10^{-11}(66516{,}73152\ )^3 \\ &= 0{,}108 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(12713{,}72234\ \ ;\ 6516{,}73152\ ) &= -0{,}04753 \\ &+ 6{,}53 \times 10^{-5}(12713{,}72234\ ) \\ &+4{,}36 \times 10^{-5}(6516{,}73152\ ) \\ &- 2{,}48 \times 10^{-8}(6516{,}73152\ )^2 \\ &= -0{,}015008 \end{aligned}$$

Langkah 4: Langkah selanjutnya yaitu dicari nilai dari $r_1\ dan\ s_1$ yang ada pada persamaan yang mana diperoleh cari pengurangan terhadap sedangkan diperoleh dari selisih terhadap yang akan digunakan ketika mencari invers dari matriks sebagai berikut:

$$r_1 = \begin{bmatrix} -6{,}9915 \times 10^{-3} \\ -0{,}013604 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3{,}7852 \times 10^{-1} \\ -2{,}7829 \times 10^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3715 \\ 0{,}0414 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = \begin{bmatrix} 12713{,}72234 \\ 6516{,}73152 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14514.48424 \\ 7059.314255 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.800 \\ 492{,}58 \end{bmatrix}$$

Langkah 5: Langkah selanjutnya yaitu mencari invers dari matriks ${A_2}^{-1}$dengan menerapkan teorerna Sherman-Morrison. Adapun hasil invers dari matriks menggunakan teorema Sherman-Morrison adalah sebagai berikut:

$${A_2}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -2{,}0684 \times 10^{-7} & -3{,}79114 \\ -2{,}3868 \times 10^{-5} & -4{,}3861 \end{bmatrix} + \frac{\left(\begin{bmatrix} -1.800 \\ -492{,}58 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0{,}1569 \\ -0{,}1816 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 0{,}01213 & 8984{,}6 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1.800 & -492{,}58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}1569 \\ -0{,}1816 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} -2{,}0684 \times 10^{-7} & -3{,}79114 \\ -2{,}3868 \times 10^{-5} & -4{,}3861 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} -1799{,}8 \\ -492{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}01213 & 8984{,}6 \end{bmatrix}}{371{,}9}$$

$$= \begin{bmatrix} -2{,}0684 \times 10^{-7} & -3{,}79114 \\ -2{,}3868 \times 10^{-5} & -4{,}3861 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}0587 & -0{,}0435 \\ -0{,}0161 & -11{,}896 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}0587 & -3{,}83464 \\ -0{,}0161 & -16{,}2821 \end{bmatrix}$$

Langkah 6 : Setelah didapatkan nilai ${A_1}^{-1}$ maka langkah selanjutnya yaitu hasil nilai invers tersebut disubstitusikan ke dalarn rumus pada persamaan, sehingga diperoleh nilai sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} x_{1_3} \\ x_{2_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12713,72234 \\ 6516,73152 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,0587 & -3,83464 \\ -0,0161 & -16,2821 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6,9915 \times 10^{-3} \\ -0,013604 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1_3} \\ x_{2_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12713,72234 \\ 6516,73152 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,0525804 \\ 0,2161256 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12713,66976 \\ 6516,50991 \end{bmatrix}$$

Karena nilai iterasi ke dua dan iterasi ke tiga hampir sama maka iterasi dihentikan, Jadi nilai Nilai $x_{1_3} = 12713,66976$ dan $x_{2_3} = 6516,50991$ Selanjutnya penulis akan mencari nilai eror menggunakan Microsoft exel, didapatkan seperti table dibawah ini:

Tabel 4.3. Perhitungan galat

No	x_1	x_2	Eror
1	10.000	6.000	
2	14514,48	7059,31	0,378
3	12713,72	6516,73	0,15008
4	12713,67	6516,51	0,15

Iterasi dapat dilanjutkan untuk memperoleh galat yang lebih kecil. Semakin banyak iterasi yang dilakukan maka akan mendapatkan solusi yang menghampiri solusi analitik.

4.2 Pembahasan

Berdasarkan hasil perhitungan di atas, untuk menyelesaikan contoh kasus sistem persamaan non linear dengan metode Broyden. Adapun dalam perhitungannya, membutuhkan proses yang panjang. Untuk metode Broyden, iterasi pertama menggunakan metode Newton Raphson yang diawali dengan menentunkan nilai tebakan awal dan mencari turunan fungsi terhadap masing-masing variabelnya. Untuk mendapatkan nilai selesaiannya, dibutuhkan juga nilai-nilai deviasi. Sedangkan dalam pencarian nilai-nilai deviasi, melibatkan perhitungan aljabar matriks yaitu matriks jacobian dan aturan cramer. Untuk matriks jacobian yang berordo 2 x 2 seperti yang dikerjakan oleh penulis.

Lalu untuk iterasi kedua dan seterusnya maka akan menggunakan teorema Sherman-Morris. Langkah pertama yang di ambil subtitusi nilai dari iterasi pertama kedalam persamaan F dan G lalu mencari nilai r_0 dan s_0 dan setelah itu baru penulis menerapkan teorema Sherman-Morris untuk mencari invers dari matriks A_1 seperti pada metode diatas, setelah didapat hasil invers tersebut penulis mensubtitusikan ke dalam pada persaman, seperti pada langkah ke 5.

Dari hasil iterasi dapat diperoleh konsentrasi parasetamol yang memenuhi seperti yang terlihat pada Tabel di atas, Pada sistem persamaan dengan panjang gelombang 272,2 nm dengan 249,1 nm apabila diselesaikan dengan metode Broyden akan diperoleh konsentrasi parasetamol sebesar 12713,66976 ppm dan konsentrasi kafein sebesar 6516,50991 ppm Jadi, dapat disimpulkan bahwa metode metode Broyden dapat diterapkan untuk mengkombinasikan besarnya konsentrasi parasetamol dan kafein dalam larutan untuk memperoleh nilai absorban yang diinginkan.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan, Dengan menggunakan langkah-langkah metode Newton Raphson dengan nilai awalan konsentrasi parasetamol sebesar 10000 dan konsentrasi kafein 6000 maka diperoleh konsentrasi parasetamol yang memenuhi Pada sistem persamaan dengan panjang gelombang 272,2 nm dengan 249,1 nm diperoleh konsentrasi parasetamol sebesar 12713,66 ppm dan konsentrasi kafein sebesar 6516,51 ppm. Jadi, dapat disimpulkan bahwa metode Broyden dapat diterapkan untuk mengkombinasikan besarnya konsentrasi parasetamol dan kafein dalam larutan untuk memperoleh nilai absorban yang diinginkan.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Burden, R.L. dan Faires, J.D. 2011. Numerical Analysis Ninth Edition. Boston: BROOKS/CALE

[2] Romantir,Baiq Maya."*Penyelesaian Sistem Persamaan Non Linear Dengan Metode Newton-Raphson Termodifikasi*".jurnal STMIKAKOM-yogyakarta.2004

[3] Rukmono,Budi Utomo."*Metode Numeric Rosenberg Dengan Arah Pencarian Termodifikasi Penambahan Konstanta* l_k *Untuk Beberapa Nilai* $0 \leq l_k \leq 1$".Jurnal

Prima Program Studi Pendidikan Matematika Dan Penelitian Matematika.Vol.6, No 1.2017.

[4] Anton, Howard dan Rorres, C. 2013. *Elementary Linear Algebra* 11th Edition. Canada : Wiley.

[5] Sastry. S.S, Formerly, Dkk. 2006. *Introductory Methods of Numerical Analysis* Fourth Edition. New Delhi : Prentice-Hall of India.

[6] Burden, Richard L. 2016. Numerical Analysis. Boston: Cengage Learning

[7] Yang, W.Y., Cao, W., Chung, T., dan Morris, J. 2005. Applied Numerical Method Using MATLAB. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[8] Bloomfield, Victor A. 2009. Using R For Numerical Analysis in Science and Engineering. New York: CRC Press

[9] Basuki, A. 2005. Metode Numerik dan Algoritma Komputasi. Yogyakarta: Andi Publiher.