

Pendekatan Faktorial Pada Bidang Riil

Zaidulkhair Hamzi

Program Studi Matematika, Universitas Negeri Makassar, zaidulkhairhamzics2@gmail.com

Syamsuddin Mas'ud*

Program Studi Matematika, Universitas Negeri Makassar, syamsuddinm@unm.ac.id

*Corresponding Author

ABSTRAK, Artikel ini adalah studi literatur tentang mendefinisikan faktorial dalam domain nyata. Tujuan penelitian ini adalah untuk menurunkan rumus aproksimasi faktorial yang dinyatakan sebagai $x!$ dengan menggunakan pendekatan analitis. Makalah ini diawali dengan asumsi bahwa rumus faktorial rekursif tetap berlaku pada domain riil, kemudian digunakan untuk mengkonstruksi rumus aproksimasi $x!$. Selanjutnya, makalah ini juga mengaitkan hasil dari bentuk aproksimasi faktorial dengan representasi integral yang relevan, seperti fungsi gamma.

Kata Kunci: faktorial, bidang riil, representasi integral, fungsi gamma, pendekatan analitis

1. PENDAHULUAN

Faktorial adalah konsep yang menunjukkan hasil dari perkalian semua bilangan bulat positif dari 1 hingga suatu bilangan bulat positif tertentu. Faktorial bukan hanya merupakan alat penting dalam kalkulus dan statistik, tetapi juga muncul dalam perhitungan probabilitas dan kombinatorika [1]. Secara umum, faktorial dari sebuah bilangan bulat positif k , dilambangkan dengan $k!$, didefinisikan sebagai persamaan (1.1),

$$k! = k \times (k-1) \times (k-2) \times \dots \times 2 \times 1. \quad (1.1)$$

Notasi $k!$ untuk faktorial diperkenalkan oleh matematikawan Prancis, Christian Kramp pada tahun 1808 [2]. Kata "faktorial" (bahasa asli Prancis: *factorielle*) pertama kali digunakan pada tahun 1800 oleh Louis François Antoine Arbogast, dalam karya pertama tentang rumus Faà di Bruno [3] tetapi mengacu pada konsep yang lebih umum tentang hasil perkalian aritmatika. "Faktor-faktor" yang dirujuk oleh nama ini adalah istilah-istilah dalam rumus produk faktorial.

Dalam konteks faktorial riil, kita tidak hanya mempertimbangkan bilangan bulat positif, tetapi juga memperluas definisi ini ke bilangan riil non-negatif. Ada banyak sekali cara untuk memperluas faktorial menjadi fungsi kontinu [4]. Menurut [5] yang paling banyak digunakan

adalah menggunakan fungsi gamma, yang dapat didefinisikan untuk bilangan real positif sebagai integral tak wajar (1.2),

$$(x-1)! = \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (1.2)$$

dengan $x \in \mathbb{R}^+$ dan t adalah variabel integrasi.

Untuk lebih jelasnya, diberikan contoh terkait sebagai berikut, misalkan $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt.$$

Substitusi $u = \sqrt{t} \Leftrightarrow u^2 = t$, dan $dt = 2udu$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \quad (1.3)$$

Integral (1.3) dikenal dengan integral gaussian [6], [7].

2. TINJAUAN PUSTAKA

Kekonvergenan Barisan Fungsi

Definisi 2.1

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ adalah sebuah himpunan tak kosong, misalkan (f_n) adalah fungsi barisan dan $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi. Fungsi barisan (f_n) konvergen titik demi titik ke f jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x \in A$, terdapat $n \geq N(\varepsilon, x)$, berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ [8].

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ untuk setiap } x \in A.$$

Catatan bahwa untuk konvergen titik demi titik, selain bergantung pada ε , boleh jadi nilai N bergantung juga pada $x \in A$. Jika setiap $\varepsilon > 0$, dapat kita temukan nilai N yang tidak bergantung pada nilai $x \in A$, maka nilai $f_n(x)$ akan

“seragam” mendekati nilai $f(x)$ pada A . Berikut diberikan definisi konvergen seragam.

Definisi 2.2

Diberikan (f_n) barisan fungsi riil pada $A \subseteq \mathbb{R}$. barisan (f_n) konvergen seragam pada A ke fungsi f pada A jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli N , sehingga untuk setiap bilangan asli $n > N$, berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, untuk setiap $x \in A$ [9].

Asimtot

Definisi 2.3

Garis $x = a$ adalah vertikal asimtot dari fungsi grafik $y = f(x)$ jika setidaknya 1 dari pernyataan (2.1) benar [10],

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= \pm\infty, \\ 2. \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= \pm\infty. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Barisan Hasil Kali

Definisi 2.4

Diberikan barisan bilangan riil (x_n) dan misalkan [11]

$$p_1 = x_1, p_2 = x_1 x_2, p_k = x_1 x_2 \dots x_k = \prod_{n=1}^k x_n.$$

Bilangan p_k disebut hasil kali parsial ke- k dan x_n disebut faktor ke- n dari hasil kali. Simbol berikut ini (2.2) digunakan untuk menyatakan hasil kali yang dimaksud,

$$x_1 x_2 \dots x_n \dots = \prod_{n=1}^{\infty} x_n. \quad (2.2)$$

Dengan analogi deret tak hingga, terlihat wajar untuk menyebut hasil kali konvergen jika (p_k) konvergen. Tetapi, setiap hasil kali yang memiliki satu faktor sama dengan nol akan konvergen, tanpa memperhatikan perilaku dari faktor-faktor lain, maka terdapat definisi baru untuk hal tersebut.

Definisi 2.5

Diberikan hasil kali tak hingga $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$ dan misalkan $p_k = \prod_{n=1}^k x_n$ untuk setiap $n, k \in \mathbb{N}$ [11].

- a) Jika tak terhingga banyaknya faktor x_n yang nol, kita katakan bahwa hasil kali tersebut divergen ke nol.

- b) Jika tidak ada faktor x_n yang nol, kita katakan hasil kali tersebut konvergen, jika ada sebuah bilangan $p \neq 0$ sehingga (p_k) konvergen ke p . Dalam kasus ini, p disebut nilai dari hasil kali tersebut dan kita tuliskan $p = \prod_{n=1}^{\infty} x_n$. Jika (p_k) konvergen ke 0, kita katakan bahwa hasil kali tersebut divergen ke nol.
- c) $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$ disebut divergen jika tidak konvergen seperti yang dijelaskan pada (b).

Faktorial

Definisi 2.6

Fungsi faktorial dari bilangan bulat positif k didefinisikan sebagai hasil kali semua bilangan bulat positif yang tidak lebih besar dari k seperti pada (1.1), yaitu [12]

$$0! = 1,$$

$$k! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (k-2) \times (k-1) \times k.$$

Ini dapat ditulis secara lebih ringkas dalam notasi hasil kali sebagai (2.3),

$$k! = \prod_{n=1}^k n. \quad (2.3)$$

Jika rumus hasil kali ini diubah untuk mempertahankan semua suku kecuali suku terakhir, rumus ini mendefinisikan hasil kali dengan bentuk yang sama, untuk faktorial yang lebih kecil. Hal ini mengarah pada relasi rekursif (2.4) yang setiap nilai dari fungsi faktorial dapat diperoleh dengan mengalikan nilai sebelumnya dengan k , [13]

$$k! = k \times (k-1)!. \quad (2.4)$$

Hasil Kali Wallis

Theorem 2.7

Hasil kali Wallis adalah hasil kali tak hingga konvergen yang dapat dilihat pada persamaan (2.5) sebagai berikut [14],

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 2}{1 \times 3} \times \dots \times \frac{2n \times 2n}{(2n-1) \times (2n+1)} = \frac{\pi}{2}. \quad (2.5)$$

Integral Gaussian

Integral Gaussian, biasa juga dikenal sebagai Euler-Poisson Integral, adalah integral fungsi Gaussian $f(x) = e^{-x^2}$ terhadap garis riil. [6], [7] Dinamakan sesuai dengan nama matematikawan jerman, Carl Friedrich Gauss,

hasil integral dapat dilihat pada persamaan (2.6) dan (2.7) sebagai berikut,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (2.6)$$

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}. \quad (2.7)$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi dari faktorial pada persamaan (1.1) memiliki rumus rekursif faktorial untuk bilangan bulat non-negatif (2.5) coba dikerjakan untuk bilangan riil yang dapat dilihat dalam persamaan (3.1),

$$x! = (x-1)!x, \quad (3.1)$$

dengan rumus rekursif diperoleh (3.2),

$$\begin{aligned} (x+1)! &= x!(x+1), \\ (x+2)! &= (x+1)!(x+2), \\ (x+3)! &= (x+2)!(x+3), \\ (x+4)! &= (x+3)!(x+4), \\ (x+5)! &= (x+4)!(x+5). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Perhatikan pada $(x+2)!$ memiliki $(x+1)!$, sehingga

$$\begin{aligned} (x+2)! &= x!(x+1)(x+2), \\ \text{untuk } (x+3)! \text{ dan } (x+4)! \text{ dapat dilihat pada} \\ \text{persamaan (3.3),} \\ (x+3)! &= x!(x+1)(x+2)(x+3), \\ (x+4)! &= x!(x+1)(x+2)(x+3)(x+4). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Akibatnya, untuk $(x+5)!$ dapat ditulis dengan notasi hasil kali (2.2) yang dapat dilihat pada persamaan (3.4),

$$(x+5)! = x! \prod_{k=1}^5 (x+k). \quad (3.4)$$

Untuk n dan k bilangan asli, diperoleh notasi (3.5)

$$(x+k)! = x! \prod_{n=1}^k (x+n), \quad (3.5)$$

yang selanjutnya bentuk (3.5) dilogaritmakan. Pertama, logaritma ini diberikan pada definisi faktorial (1.1) sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} \ln(k!) &= \ln(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k), \\ \ln(k!) &= \ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + \dots + \ln(k). \end{aligned}$$

Dengan kata lain, karna logaritma dari bentuk faktorial dapat ditulis dalam notasi sigma (3.6),

$$\ln(k!) = \sum_{n=1}^k \ln(n). \quad (3.6)$$

Berdasarkan rumus rekursif riil (3.1) dan sifat logaritma (3.6), diperoleh persamaan (3.7)

$$\ln(x!) = \ln((x-1)!) + \ln(x), \quad (3.7)$$

dan persamaan (3.8)

$$\begin{aligned} \ln((x+k)!) &= \ln\left(x! \prod_{n=1}^k (x+n)\right), \\ \ln((x+k)!) &= \ln(x!) + \sum_{n=1}^k \ln(x+n). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Catatan bahwa sifat (3.9) berikut berlaku untuk N yang sangat besar, dengan menggunakan sifat logaritma dan limir barisan.

$$\ln(N) \approx \ln(N+n). \quad (3.9)$$

Sehingga untuk N yang besar dan berdasarkan (3.8) maka

$$\begin{aligned} \ln((N+k)!) &= \ln(N!) + \sum_{n=1}^k \ln(N+n), \\ \ln((N+k)!) &= \ln(N!) \\ &\quad + \sum_{n=1}^k (\ln(N) + \ln(N+n) \\ &\quad - \ln(N)), \\ \ln((N+k)!) - \ln(N!) &= \sum_{n=1}^k \ln(N) \\ &\quad - \sum_{n=1}^k \ln(N) \\ &= \sum_{n=1}^k (\ln(N+n) - \ln(N)). \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan melimitkan kedua ruas maka diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\ln((N+k)!) - \ln(N!) - \sum_{n=1}^k \ln(N) \right) \\ = \sum_{n=1}^k 0, \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\ln((N+k)!) - \ln(N!) - k \ln(N)) = 0.$$

Selanjutnya, diperumum untuk $x \in \mathbb{R}$ sebagai berikut,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\ln((N+x)!) - \ln(N!) - x \ln(N)) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\ln(x!) + \sum_{n=1}^N \ln(x+n) - \sum_{n=1}^N \ln(n) - x \ln(N) \right) = 0, \\
\ln(x!) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(- \sum_{n=1}^N \ln(x+n) + \sum_{n=1}^N \ln(n) + x \ln(N) \right), \\
\ln(x!) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N (\ln(n) - \ln(x+n)) + x \ln(N) \right), \\
&\text{sehingga untuk } \ln(x!) \text{ diperoleh (3.10)} \\
\ln(x!) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{n}{x+n}\right) + x \ln(N) \right). \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Kemudian kembalikan ke bentuk awal

$$x! = \lim_{N \rightarrow \infty} N^x e^{\sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{n}{x+n}\right)}.$$

Akibatnya, diperoleh persamaan (3.11) sebagai konstruksi rumus $x!$

$$x! = \lim_{N \rightarrow \infty} N^x \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{x+n} \right). \quad (3.11)$$

Berikut diberikan contoh agar mempermudah pemahaman

Contoh 3.1

Dengan menggunakan persamaan (3.11), dapat ditentukan nilai $1!$ sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
1! &= \lim_{N \rightarrow \infty} N^1 \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{1+n} \right) \\
1! &= \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \frac{N!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots N(N+1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \frac{N!}{N!(N+1)} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{N}{N}}{\frac{N+1}{N}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{N}} \\
&= \frac{1}{1+0} = 1
\end{aligned}$$

Jadi dengan persamaan (3.11), nilai dari $1!$ adalah 1.

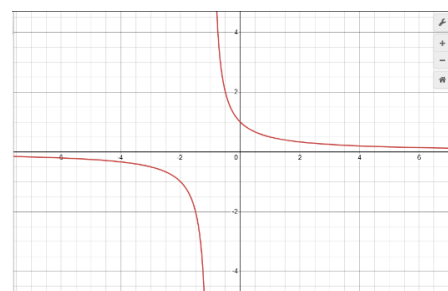
Contoh 3.2

Dengan menggunakan persamaan (3.11), dapat ditentukan nilai $\left(\frac{1}{2}\right)!$ sebagai berikut,

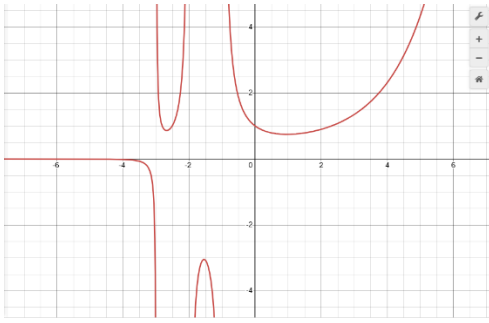
$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)! &= \lim_{N \rightarrow \infty} N^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{\frac{1}{2} + n} \right) \\
\left(\frac{1}{2}\right)! &= \lim_{N \rightarrow \infty} N^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^N \left(\frac{2n}{2n+1} \right) \\
\left(\left(\frac{1}{2}\right)!\right)^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} N \prod_{n=1}^N \left(\frac{2n}{2n+1} \right) \left(\frac{2n}{2n+1} \right) \\
\left(\left(\frac{1}{2}\right)!\right)^2 &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{2n}{2n+1} \right) \left(\frac{2n}{2n+1} \right) \\
\left(\left(\frac{1}{2}\right)!\right)^2 &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 2n}{2n^2 + n} \right) \left(\frac{2n}{2n+1} \right) \\
\left(\left(\frac{1}{2}\right)!\right)^2 &= \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{4}{5} \right) \left(\frac{8}{7} \cdot \frac{6}{7} \right) \left(\frac{10}{9} \cdot \frac{8}{9} \right) \cdots \\
\left(\left(\frac{1}{2}\right)!\right)^2 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdots \\
2 \left(\left(\frac{1}{2}\right)!\right)^2 &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \right) \left(\frac{2n}{2n+1} \right) \\
&\text{dengan mengingat Hasil kali Wallis pada teorema 2.7, maka} \\
2 \left(\left(\frac{1}{2}\right)!\right)^2 &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \right) \left(\frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{2} \\
\left(\left(\frac{1}{2}\right)!\right)^2 &= \frac{\pi}{4} \\
\left(\frac{1}{2}\right)! &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

Jadi dengan persamaan (3.11), nilai dari $\left(\frac{1}{2}\right)!$ adalah $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

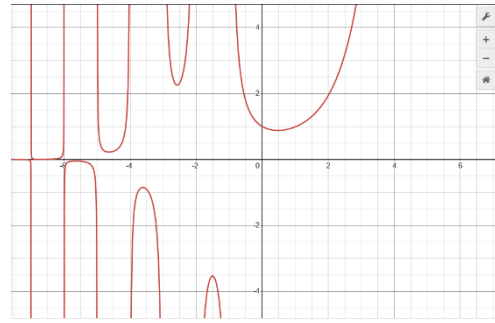
Dengan menggunakan bantuan aplikasi Desmos, dapat dilihat perkembangan grafik fungsi $N^x \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{x+n} \right)$ untuk N yang semakin besar,



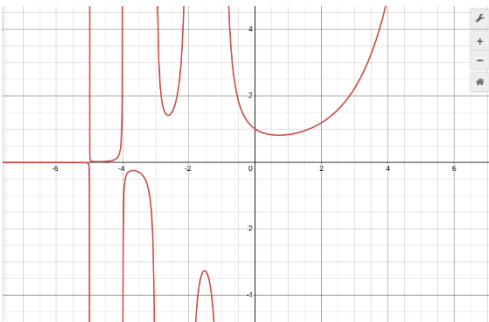
Gambar 3.1 Fungsi $N^x \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{x+n} \right)$ jika $N = 1$



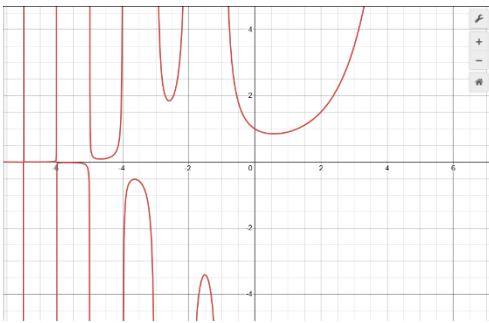
Gambar 3.2 Fungsi $N^x \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{x+n}\right)$ jika $N = 3$



Gambar 3.5 Fungsi $N^x \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{x+n}\right)$ jika $N = 100$



Gambar 3.3 Fungsi $N^x \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{x+n}\right)$ jika $N = 5$



Gambar 3.4 Fungsi $N^x \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{x+n}\right)$ jika $N = 10$

Berdasarkan Gambar 3.5 untuk $N \rightarrow \infty$ konvergen disetiap titik selain bilangan bulat negatif, karna apabila x adalah bilangan bulat negatif contohnya jika $x = -1$ maka dengan persamaan (3.11)

$$(-1)! = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{-1+n}\right),$$

$$(-1)! = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N!}{N((-1+1)(-1+2) \dots ((-1+N)))}\right),$$

$$(-1)! = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N!}{N((0)(1) \dots ((-1+N)))}\right) = \text{tak terdefinisi}$$

Sehingga terdapat syarat untuk persamaan (3.11) yaitu,

$$x! = \lim_{N \rightarrow \infty} N^x \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{x+n}\right), x \notin \mathbb{Z}^-$$

Teorema 3.3

Jika $x \in \mathbb{R}^+$, maka

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} N^{x-1} \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{x+n-1}\right) \\ &= \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \end{aligned}$$

Terlebih dahulu akan dibuktikan secara induktif bahwa $\forall n \in \mathbb{N}$, dengan $s \neq 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^{x-1} ds \\ = \frac{(n-1)!}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Misalkan $n = 1$ dan $x > 0$, maka

$$\int_0^1 s^{x-1} ds = \left[\frac{s^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x} = \frac{0!}{x}$$

Asumsikan persamaan (3.12) berlaku di $n-1$ akan ditunjukkan persamaan (3.12) juga berlaku di n , dengan integral parsial, maka

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-s)^n s^{x-1} ds &= \int_0^1 (1-s)^n d\left(\frac{s^x}{x}\right) ds \\ &= \left[\frac{s^x(1-s)^n}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 -n(1-s)^{n-1} \left(\frac{s^x}{x}\right) ds \\ \int_0^1 (1-s)^n s^{x-1} ds &= \frac{n}{x} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^x ds \\ \int_0^1 (1-s)^n s^{x-1} ds &= \frac{n}{x} \cdot \frac{(n-1)!}{(x+1)(x+2) \dots (x+n)} \\ \int_0^1 (1-s)^n s^{x-1} ds &= \frac{n!}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n)}. \end{aligned}$$

karena

$$\int_0^1 (1-s)^{n-1} (s)^{x-1} ds = \frac{(n-1)!}{x(x+1) \dots (x+n-1)},$$

maka

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} N^{x-1} \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{x+n-1} \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{x-1} N!}{x(x+1) \dots (x+N-1)} \\
\lim_{N \rightarrow \infty} N^{x-1} \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{x+n-1} \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^x (N-1)!}{x(x+1) \dots (x+N-1)} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} N^x \int_0^1 (1-s)^{N-1} (s)^{x-1} ds \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 (1-s)^{N-1} N s^{x-1} ds \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 (1-s)^{N-1} (Ns)^{x-1} N ds.
\end{aligned}$$

Misalkan $s = \frac{t}{N}$ dan dapat dilihat bahwa,

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{N} \right)^{N-1} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{N} \right)^N \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{N} \right)^{-1} \\
&= e^{-t} \cdot 1 = e^{-t}.
\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \left(1 - \frac{t}{N} \right)^{N-1} t^{x-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Jadi,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{x-1} \prod_{k=1}^N \left(\frac{k}{x+k-1} \right) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Contoh 3.4

Dengan menggunakan Teorema 3.3, dapat ditentukan nilai $\Gamma(3)$ sebagai berikut,

$$\Gamma(3) = \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt$$

Misalkan $u = t^2$ dan $dv = e^{-t} dt$ maka $du = 2t dt$ dan $v = -e^{-t}$, sehingga dengan integral parsial,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^2 e^{-t} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left([-t^2 e^{-t}]_0^b - 2 \int_0^b (-t e^{-t} dt) \right).
\end{aligned}$$

Misalkan $u = -t$ dan $dv = e^{-t} dt$ maka $du = -dt$ dan $v = -e^{-t}$, sehingga

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} ([-t^2 e^{-t} - 2t e^{-t} - 2e^{-t}]_0^b)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^2 e^{-t} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} ((-b^2 e^{-b} - 2b e^{-b} - 2e^{-b}) \\
&\quad - (-0^2 e^0 - 2(0) e^0 - 2e^0))
\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = (0 - 0 - 0 + 0 + 0 + 2) = 2.$$

Jadi, dengan teorema 3.3, nilai dari $\Gamma(3)$ adalah 2.

Contoh 3.5

Dengan menggunakan Teorema 3.3, dapat ditentukan nilai $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ sebagai berikut,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)! = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

Misalkan $u = t^{\frac{1}{2}}$ maka $u^2 = t$ dan $dt = 2u du$, sehingga

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty u^2 e^{-u^2} du = 2 \int_0^\infty u \cdot u e^{-u^2} du.$$

Misalkan $w = u$ dan $dv = u e^{-u^2} du$ maka $dw = du$ dan $v = -\frac{1}{2} e^{-u^2}$, sehingga

$$\begin{aligned}
2 \int_0^\infty u \cdot u e^{-u^2} du &= \lim_{b \rightarrow \infty} 2 \left(\left[-\frac{u}{2} e^{-u^2} \right]_0^b + \int_0^b \frac{1}{2} e^{-u^2} du \right) \\
&= 0 - 0 + \int_0^\infty e^{-u^2} du.
\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi integral gaussian. Akibatnya,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)! = \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Pada tulisan ini, telah berhasil diturunkan rumus pendekatan faktorial dalam domain riil dengan mendefinisikan rumus rekursif yang bekerja pada domain riil. Pendekatan ini memungkinkan perluasan definisi faktorial dari bilangan bulat ke bilangan riil. Selain itu, tulisan ini juga berhasil merepresentasikan bentuk hasil kali $x!$ ke dalam bentuk, sehingga nilai $x!$ dapat dihitung secara lebih mudah dan akurat, khususnya untuk bilangan riil. Penelitian ini memberikan kontribusi pada pengembangan teori faktorial dan potensial untuk diaplikasikan

dalam berbagai bidang, seperti analisis kompleks dan matematika terapan

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] J. Pitman, "Probability," 1993, doi: 10.1007/978-1-4612-4374-8.
- [2] F. Cajori, "A history of mathematical notations: Two volumes bound as one," *Differ. Equations*, 1928, Accessed: Mar. 10, 2025. [Online]. Available: https://books.google.com/books/about/A_History_of_Mathematical_Notations.html?hl=id&id=7juWmvQSTvwC
- [3] A. D. D. Craik, "Prehistory of Faà di Bruno's Formula," *Am. Math. Mon.*, vol. 112, no. 2, pp. 119–130, 2005, doi: 10.1080/00029890.2005.11920176.
- [4] P. J. Davis, "Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function," *Am. Math. Mon.*, vol. 66, no. 10, pp. 849–869, 1959, doi: 10.1080/00029890.1959.11989422.
- [5] J. M. Borwein and R. M. Corless, "Gamma and Factorial in the Monthly," *Am. Math. Mon.*, vol. 125, no. 5, pp. 400–424, 2018, doi: 10.1080/00029890.2018.1420983.
- [6] C. P. Nicholas and R. C. Yates, "The Probability Integral," *Am. Math. Mon.*, vol. 57, no. 6, p. 412, 1990, doi: 10.2307/2307644.
- [7] K. Conrad, "the Gaussian Integral," *Math.Uconn.Edu*, vol. c, pp. 1–11, 2016, [Online]. Available: <http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/gaussianintegral.pdf>
- [8] E. D. Bloch, "The Real Numbers and Real Analysis," *Real Numbers Real Anal.*, 2011, doi: 10.1007/978-0-387-72177-4.
- [9] K. A. . Ross, "Elementary analysis : the theory of calculus," p. 351, 2003.
- [10] P. Giblin, "The Mathematical Gazette," *Mathematical Assosiation*, 1972, pp. 274–284. doi: 10.1038/139163a0.
- [11] T. M. Apostol, "Mathematical Analysis, Second Edition," *Education*, vol. 9, no. 3, p. 492, 1974.
- [12] "Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science - Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik - Google Buku." https://books.google.co.id/books/about/Concrete_Mathematics.html?id=ctnPEAAQBAJ&redir_esc=y (accessed Mar. 10, 2025).
- [13] J. D. Hamkins, "Proof and the art of mathematics," *Proof Prog. Math.*, vol. 111, no. 2, p. 208, 2020, Accessed: Mar. 10, 2025. [Online]. Available: https://books.google.com/books/about/Proof_and_the_Art_of_Mathematics.html?hl=id&id=EVX6DwAAQBAJ
- [14] D. Salwinski, "Euler's Sine Product Formula: An Elementary Proof," *Coll. Math. J.*, vol. 49, no. 2, pp. 126–135, 2018, doi: 10.1080/07468342.2018.1419703.