Himpunan Pembeda tanpa Titik Terisolasi Graf Kincir ($K_1 + mK_m$)

Wahyuni Abidin,
Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, wahyuniabidin@uin-alauddin.ac.id

Muhammad Ridwan
Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, muhammadridwan@uin-alauddin.ac.id

**Corresponding Author*

ABSTRAK, Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung, sederhana, dan berhingga. Misalkan himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ merupakan subhimpunan dari V. Representasi titik $v \in V$ terhadap W didefinisikan sebagai $r(v|W) = d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)$ dengan $d(v, w_i)$ menyatakan jarak v dan w_i. Himpunan W dikatakan himpunan pembeda dari G, jika setiap titik dari G mempunyai representasi yang berbeda. Suatu v merupakan suatu titik terisolasi, jika tidak ada sisi yang terkait dengan titik v. Himpunan pembeda W disebut himpunan pembeda tanpa titik terisolasi, jika subgraf yang diinduksi $\langle W \rangle$ tidak mempunyai titik terisolasi. Suatu himpunan pembeda tanpa titik terisolasi dari G dengan kardinalitas minimum disebut himpunan-nr dari G. Kardinalitas dari himpunan-nr disebut bilangan pembeda tanpa titik terisolasi yang dinotasikan dengan $nr(G)$. Berdasarkan hasil penelitian ini, diperoleh bahwa bilangan pembeda tanpa titik terisolasi dari graf $K_1 + mK_n$ memenuhi $nr(K_1 + mK_n) = \text{m} + 1$ untuk $n = 2$ dan $nr(K_1 + mK_n) = m(n-1)$, untuk $n \geq 3$.

Kata Kunci: bilangan pembeda tanpa titik terisolasi, dimensi metrik, graf kincir, himpunan pembeda, himpunan pembeda tanpa titik terisolasi

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit yang memiliki peran penting dalam berbagai bidang, seperti ilmu komputer, jaringan komunikasi, biologi, kimia hingga ilmu sosial. Salah satu topik menarik dalam teori graf adalah studi mengenai himpunan pembeda yang berkaitan dengan kemampuan dalam membedakan semua pasangan titik pada suatu graf berdasarkan jaraknya terhadap anggota-anggota himpunan tertentu.

Konsep himpunan pembeda pertama kali diperkenalkan pertama kali oleh Slater [9], serta oleh Harary dan Melter [7], namun menggunakan istilah yang berbeda. Slater menggunakan istilah himpunan lokasi yang disebut sebagai himpunan pembeda oleh Harary dan Melter. Suatu himpunan pembeda dengan kardinalitas terkecil disebut sebagai himpunan pembeda minimum. Kardinalitas suatu himpunan pembeda minimum disebut sebagai bilangan lokasi oleh Slater, sedangkan Harary dan Melter menggunakan istilah dimensi metrik. Dalam perkembangannya, studi mengenai himpunan pembeda tidak hanya terbatas pada graf sederhana, tetapi juga melibatkan kondisi tambahan, seperti pembatasan terhadap titik terisolasi.

Titik terisolasi, yaitu suatu titik yang tidak terkait dengan sisi. Oleh karena itu, dalam beberapa kasus, kehadiran titik terisolasi tidak diinginkan dalam pembentukan himpunan pembeda. Hal ini mendorong kajian mengenai himpunan pembeda tanpa titik terisolasi, yakni himpunan pembeda yang tidak memuat titik titik terisolasi.

Beberapa penelitian telah dilakukan untuk menentukan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi pada kelas graf. Salah satunya adalah Avadayappan dkk menentukan nilai $nr(G)$ pada graf *splitting*, dan menekankan perbedaan signifikan antara dimensi metrik dan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi [4]. Selanjutnya, Chitra & Arumugam menyajikan kajian teoritis mengenai karakteristik himpunan pembeda tanpa titik terisolasi [6]. Selain itu, Abidin W meneliti nilai nr dari graf *cycle book* [1].

Penelitian-penelitian dalam konteks graf hasil operasi juga mulai berkembang. Abidin dkk. (2018) menghitung nilai $nr(G)$ pada graf hasil operasi korona antara graf G dan H, dengan hasil yang bervariasi bergantung jenis graf H [2]. Di sisi lain, Alivia Zisza Tauhida meneliti nilai $nr(G)$ pada graf hasil amalgamasi titik, seperti lintasan, graf Bintang, dan siklus, serta memberikan rumus eksplisit tergantung parameter n dan m[10]. Untuk graf hasil produk Kartesius, Hasibuan dkk. (2018) meneliti nilai nr dari graf $H \square P_n$ $H \square P_n$, dan memperoleh nilai $nr(H \square P_n)$ dan memperoleh nilai $nr(H \square P_n)$ untuk H adalah graf lengkap, bipartite lengkap, dan siklus [8].

Meskipun berbagai penelitian telah dilakukan, studi mengenai bilangan pembeda tanpa titik terisolasi pada graf hasil operasi jumlah graf seperti graf kincir $K_1 + mK_n$, masih belum banyak dibahas. Oleh karena itu, penelitian ini diarahkan untuk mengisi kekosongan tersebut, dengan tujuan memperolehaitu $r(v_2|W_1) = (1,2,1)$ nilai $nr(G)$ pada struktur graf yang memiliki titik pusat dan klaster-klaster lengkap.

2. KAJIAN TEORI

Pada bagian ini menjelaskan tentang graf dan notasi dasar, himpunan pembeda, himpunan pembeda tanpa titik terisolasi, dan graf kincir $K_1 + mK_n$.

Graf dan Jenis-Jenis Graf

Graf merupakan pasangan terurut $G = \big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan titik tidak boleh kosong dan $E(G) \subseteq \{\{\mathrm{u,v}\}|\ \mathrm{u,v} \in \mathrm{V}(G), \mathrm{u} \neq \mathrm{v}\}$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan dua titik Suatu titik v dikatakan terkait dengan suatu sisi e, jika $v \in e$. Untuk menyederhanakan penulisan sisi $\{u, v\}$ ditulis uv. Dua titik u dan v pada G dikatakan bertetangga, jika $uv \in E(G)$. Banyaknya titik pada suatu graf G disebut orde, dinotasikan dengan $|V(G)|$. Suatu graf dikatakan berhingga jika ordenya berhingga. Suatu graf dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik sebarang u dan v di G, terdapat lintasan yang menghubungkan u dan v.

Graf yang berorde 1 disebut graf trivial. Derajat titik $u \in G$, dinotasikan dengan $d(u)$, adalah banyaknya sisi yang terkait pada u. Suatu titik dikatakan titik terisolasi, jika derajatnya 0.

Misalkan G adalah suatu graf. Jarak antara dua titik u dan v di G, dinotasikan dengan $d_G(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan kedua titik tersebut di G.

Ada beberapa jenis-jenis graf, di antaranya graf lengkap, graf bipartite lengkap, graf lintasan, graf bintang, dan graf pohon. Graf lengkap, dinotasikan dengan K_n, adalah graf terhubung yang setiap dua titiknya saling bertetangga. Graf bipartite lengkap, dinotasikan dengan $K_{m,n}$, adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi 2 himpunan independen sehingga setiap dua titik di partisi berbeda saling bertetangga. Graf lintasan berorde n dinotasikan dengan P_n, adalah suatu graf yang titik-titiknya dengan $v_1, v_2, , \dots, v_n$ sehingga $E(P_n) = v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$. Graf siklus berorde $n \geq 3$, dinotasikan dengan C_n, adalah graf terhubung teratur-2. Graf bintang berorde $n + 1$, dinotasikan dengan S_n, adalah graf terhubung yang mempunyai satu titik yang berderajat n dan n titik berderajat 1. Graf pohon berorde n, dinotasikan dengan T_n, adalah graf terhubung yang tidak memuat siklus.

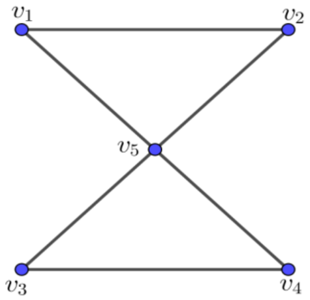
Dimensi Metrik Graf

Misalkan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ adalah subhimpunan terurut titik-titik pada graf G. Representasi titik $u \in V(G)$ terhadap W, adalah $r(u|W) = (d(u, w_1), d(u, w_2), \dots, d(u, w_k)$ dengan $d(u, w_i)$ untuk $i \in [1, k]$ adalah jarak dari titik u ke titik w_i. Himpunan W disebut himpunan pembeda pada G jika untuk setiap titik u, v pada G dengan $u \neq v$ mengakibatkan $r(u|W) \neq r(v|W)$. Suatu himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum dari G disebut sebagai basis G. Bilangan bulat terkecil k sehingga G mempunyai suatu himpunan pembeda dengan k anggota disebut dimensi metrik dari G dan dinotasikan dengan $\dim(G)$.

Bilangan Pembeda Tanpa Titik Terisolasi

Pertama kali yang memperkenalkan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi, yakni Chitra dan Arumugam pada tahun 2015. Adapun definisi bilangan pembeda tanpa titik terisolasi sebagai berikut.

Definisi 1.
Himpunan pembeda W dari graf G dikatakan sebagai himpunan pembeda tanpa titik terisolasi, jika $\langle W \rangle$ subgraf G yang diinduksi oleh W tidak memiliki titik terisolasi. Kardinalitas dari himpunan pembeda tanpa titik terisolasi yang minimum dari G disebut bilangan pembeda tanpa titik terisolasi dan dinotasikan $nr(G)$.



Gambar 1. Graf G

Sebagai ilustrasi, perhatikan graf H, seperti pada Gambar 1. Misalkan $W_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$. Representasi $v \in V(H)$ terhadap W_1, yaitu $r(v_2|W_1) = (1,2,1)$ dan $r(v_4|W_1) = (2,1,1)$. Karena itu, W_1 merupakan himpunan pembeda tanpa titik terisolasi dari graf H karena semua titik di H mempunyai representasi yang berbeda dan W_1 tidak memuat titik terisolasi. Selanjutnya, apakah ada himpunan pembeda tanpa titik terisolasi dengan kardinalitas 2. Misalkan dipilih $W_2 = \{v_1, v_2\}$ atau $W_3 = \{v_3, v_4\}$. Dalam pemilihan ini ternyata W_2 atau W_3 bukan himpunan pembeda tanpa titik terisolasi karena $r(v_3|W_2) = r(v_4|W_2)$ atau $r(v_1|W_3)$= $r(v_2|W_3)$. Begitu juga, misalkan dipilih $W_4 = \{v_1, v_5\}$ atau $W_5 = \{v_3, v_5\}$. Diperoleh $r(v_3|W_4) = r(v_4|W_4)$ atau $r(v_1|W_5)$= $r(v_2|W_5)$. Jadi, tidak ada himpunan pembeda tanpa titik terisolasi dengan kardinalitas 2. Oleh karena itu, $nr(H) = 3$.

Graf Kincir $(K_1 + mK_n)$

Join graf dari dua graf G dan H dinotasikan dengan $G + H$, adalah graf yang dibentuk dengan mengambil semua titik dan semua sisi dari graf G dan H, kemudian setiap titik di G bertetangga dengan setiap titik di H. Misalkan mK_n merupakan m salinan dari graf lengkap (K_n). Graf kincir $(K_1 + mK_n)$ merupakan suatu titik $dari\ V(K_1)$ bertetangga dengan setiap titik $V(mK_n)$. Dengan kata lain, graf $K_1 + mK_n$ adalah graf K_1 join dengan graf mK_n

3. METODOLOGI PENELITIAN

Untuk mencapai tujuan penelitian, penelitian pada setiap tahun dilakukan dalam dua tahap sebagai berikut.

1. Tahap Pendahuluan
   Penilitian ini diawali dengan menelaah literatur yang terkait dengan dimensi metrik dan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi. Hal ini dilakukan untuk memastikan hasil peneliti lain pada topik ini sehingga dapat diyakini kebaruan masalah yang akan dikaji.
2. Tahap Penelitian
   Pada tahapan ini, kegiatan penelitian difokuskan pada penentukan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi graf kincir $(K_1 + mK_n)$. Pembuktian dibagi ke dalam dua kasus.
   1. Penentuan batas bawah
      Untuk menentukan batas bawah bilangan pembeda tanpa titik tersisolasi dilakukan dengan menggunakan metode kontradiksi dengan memperhatikan karakter dari graf kincir $(K_1 + mK_n)$, dan dimensi graf.
   2. Penentuan batas atas

      Pertama yang dilakukan pendefinisian himpunan titik dan himpunan sisi pada graf kincir $(K_1 + mK_n)$. Kemudian, dikonstruksi calon himpunan pembeda tanpa titik terisolasi. Diupayakan kardinalitas himpunan tersebut sama dengan batas bawah yang sudah diperoleh. Kemudian dilakukan pengecekan representasi semua titik pada graf sehingga setiap titik memiliki representasi yang unik.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

BilanganPembeda Tanpa Titik Terisolasi Graf Kincir

Pada bagian ini akan dibuktikan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi dari graf kincir $K_1 + mK_n$, untuk $m \geq 2$, dan n ≥ 2. Bilangan pembada tanpa titik terisolasi dapat dilihat pada teorema berikut.

Teorema 1.
Misalkan n dan m adalah bilangan bulat positif paling sedikit 2, maka

$$nr(K_1 + mK_n) = \begin{cases} m+1, & \text{untuk } n = 2 \\ m(n-1), & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti:
Misalkan K_1 dan K_n adalah graf lengkap yang berturut-turut berorde 1 dan n. Selanjutnya, mK_n adalah m salinan graf lengkap berorde n. Misalkan $V(K_1) = \text{u}$ dan $V(aK_n) = \{v_{1a}, v_{2a,} \dots, v_{na}\}$ dengan $1 \le a \le m$. Sehingga, $V(K_1 + aK_n) = \{u, v_{1a}, v_{2a,} \dots, v_{na}\}$ dan $E(K_1 + aK_n) = \{uv_{1a}, uv_{2a}, \dots, uv_{na}\} \cup E(K_n)$.

Kasus 1. Untuk $n = 2$

Pertama, akan dibuktikan bahwa $nr(K_1 + mK_n) \le m + 1$. Konstruksi himpunan pembeda tanpa titik terisolasi W dengan $W = \{u, v_{1a}\}$, untuk $1 \le a \le m$. Karena $uv_{1a} \in E(K_1 + mK_n)$, untuk setiap $1 \le a \le m$, maka W tidak memuat titik terisolasi. Perhatikan bahwa, untuk $1 \le a \le m$, dan $1 \le b \le m$, $d(u, v_{2a}) = 1 = d(u, v_{2b})$, tetapi $d(v_{1a}, v_{2a}) = 1 \neq 2 = d(v_{1a}, v_{2b})$. Oleh karena itu, setiap titik memiliki representasi yang berbeda.

Selanjutnya, akan dibuktikan $nr(K_1 + mK_n) \ge m + 1$. Andaikan W' himpunan pembeda tanpa titik terisolasi dari $K_1 + mK_n$ dengan $|W'| < m + 1$. Tinjau dua subkasus sebagai berikut:

i. $u \in W'$
   Karena $|W'| < m + 1$, maka terdapat dua titik $v_{1a} \notin W'$ dan $v_{2a} \notin W'$, untuk suatu $1 \le a \le m$ sehingga $d(v_{1a}, u) = 1 = d(v_{2a}, u)$.
ii. $u \notin W'$
   Untuk setiap salinan m graf lengkap (K_n) berkontribusi satu titik di W', maka W' memiliki titik terisolasi. Akan tetapi, jika terdapat suatu salinan graf lengkap (K_n) berkontribusi dua titik di W', maka terdapat suatu salinan lain dari graf lengkap (K_n) yang mengakibatkan dua titik berbeda dari salinan tersebut memiliki representasi yang berbeda.

Kasus 2. Untuk $n \ge 3$

Pertama, akan dibuktikan bahwa $nr(K_1 + mK_n) \le m(n-1)$. Konstruksi himpunan pembeda tanpa titik terisolasi W dengan $W = \{v_{1a}, v_{2a}, \dots, v_{(n-1)a}\}$, untuk $1 \le a \le m$. Karena W menginduksi subgraf lengkap (K_n), maka W tidak memuat titik terisolasi. Selanjutnya, Representasi titik-titik $v \in V(K_1 + mK_n) - W$ terhadap W adalah
$r(u|W) = (1,1, \dots ,1,1)$;
$r(v_{na}|W) = (1,1, \dots ,2,2)$, dengan $d(v_{na}, v_{pa}) = 1$ untuk $1 \le p \le n-1$ dan $d(v_{na}, v_{nq}) = 2$.

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa $nr(K_1 + mK_n) \ge m(n-1)$. Andaikan W' himpunan pembeda tanpa titik terisolasi dari $K_1 + mK_n$ dengan $|W'| < m(n-1)$. Tinjau dua subkasus sebagai berikut:

i. $u \in W'$
   Karena $|W'| < m(n-1)$, maka terdapat dua titik $v_{1a} \notin W'$ dan $v_{2a} \notin W'$, untuk suatu $1 \le a \le m$ sehingga $d(v_{1a}, u) = 1 = d(v_{2a}, u)$.
ii. $u \notin W'$
   Karena $|W'| < m(n-1)$, maka terdapat suatu salinan graf lengkap (K_n) $yang$ mengakibatkan dua titik pada salinan tersebut memiliki representasi yang sama.

5. KESIMPULAN

Penelitian ini membahas bilangan pembeda tanpa titik terisolasi pada graf kincir $\boldsymbol{K_1 + mK_n}$. Berdasarkan hasil yang diperoleh bahwa: untuk $\boldsymbol{n = 2}$, bilangan pembeda tanpa titik terisolasi dari graf $\boldsymbol{K_1 + mK_n}$ adalah sebesar $\boldsymbol{m + 1}$. Sedangkan untuk $\boldsymbol{n \ge 3}$, bilangan pembeda tanpa titik terisolasi dari graf $\boldsymbol{K_1 + mK_n}$ adalah sebesar $\boldsymbol{m(n-1)}$.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Abidin, W. (2023). Bilangan pembeda tanpa titik terisolasi graf cycle books. Jurnal Matematika, Statistika dan Aplikasinya (MSA), 11(1), 12-20.
[2] Abidin, W., Salman, A. N. M., & Saputro, S. (2018). The non-isolated resolving numberof some corona graphs. Journal of Physics: Conference series, 1097(1), 012073.
[3] Alfarisi, M., Dafik, Kristiana, & Agustin,I. (2019). Non-isolated resolving number of graph with pendant edges. Universitas Jember Repository.
[4] Avadayappan, K., Bhuvaneshwari, S., & Chitra, K. (2018). Non-isolated resolving number for some splitting graphs. Malaysian

Journal of Mthematical Sciences, 12(2), 229-243.

[5] Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory*. Springer.

[6] Chitra, P. J. B. dan Arumugam, S. (2015): Resolving Sets without Isolated Vertices, Procedia Computer Science, 74, 38–42.

[7] Harary, F. dan Melter, R. A. (1976). On the metric dimension of graph, Ars Combinatoria, 2, 191–195.

[8] Hasibuan, I. M., Salman, A. N. M., & Saputro, S. (2018). Non-isolated resolving sets of certain graphs Cartesian product with a pant. Journal of Physics: Conference Series, 1008(1), 012045.

[9] Slater, P.J. (1975). Leaves of trees, *Proceeding of the 6Th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium*, 14, 549-559.

[10] Tauhida, A. Z. (2017). Nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda tidak terisolasi pada graf hasil operasi amalgamasi titi. Skripi, Universitas Jember.