# Dimensi Partisi Dominasi Graf Kelas Pohon

Muhammad Ridwan*
*Program Studi di Matematika, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, muhammadridwan@uin-alauddin.ac.id*

**Corresponding Author*

**ABSTRAK** Dimensi partisi dominasi merupakan konsep yang menggabungkan dua ide penting dalam teori graf: partisi pembeda dan himpunan dominasi. Misalkan $G$ adalah suatu graf terhubung dan $\Gamma = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ adalah partisi terurut dari himpunan titik graf $G$. Suatu partisi $\Gamma$ disebut partisi pembeda jika untuk setiap sepasang titik $u$ dan $v$, jarak antara $u$ dan $L_j$ tidak sama dengan jarak $v$ dan $L_j$ untuk suatu $L_j \in \Gamma$. Suatu partisi pembeda $\Gamma$ dikatakan partisi pembeda dominasi jika untuk setiap titik $u$ di $G$ jarak antara titik $u$ dan suatu kelas partisi $L_j$ adalah satu. Selanjutnya, dimensi partisi graf $G$ adalah kardinalitas minimum dari suatu partisi pembeda dari $G$. Adapun kardinalitas minimum dari suatu partisi pembeda dominasi dari $G$ disebut dimensi partisi dominasi. Sebagai pengembangan penelitian dalam kajian dimensi partisi dominasi, dalam makalah ini dikaji dimensi partisi dominasi graf dalam kelas pohon. Hasil dari penelitian ini menunjukkan dimensi partisi dominasi untuk graf bintang ganda, graf ulat, graf kembang api, dan graf pohon pisang.

**Kata Kunci**: pohon, dimensi graf, partisi pembeda, partisi dominasi.

## 1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang utama matematika diskrit yang memiliki peran penting dalam memodelkan interaksi dan keterhubungan antar entitas diskrit pada berbagai bidang, seperti ilmu komputer, telekomunikasi, biologi, hingga optimasi jaringan [1]. Di antara berbagai kelas graf, graf pohon termasuk kelas graf yang fundamental karena strukturnya yang sederhana namun mampu merepresentasikan berbagai fenomena hierarkis. Selain itu, dalam teori graf sendiri, graf pohon banyak digunakan untuk mengkaji dan memeriksa dugaan dalam suatu konsep [2]. Oleh karena itu, kajian terhadap graf pohon memberikan dasar analisis untuk berbagai konsep dalam teori graf, termasuk partisi dan dominasi, yang menjadi fokus penelitian ini.

Kajian mengenai partisi dalam graf telah berkembang sejak diperkenalkannya konsep dimensi metrik oleh Harary dan Melter [1]. Konsep dimensi metrik selanjutnya dikembangkan oleh Chartrand dkk menjadi dimensi partisi [3]. Perkembangan penelitian tentan dimensi dalam graf sangat bervariasi. Salah satu variasi yang baru adalah dimensi partisi dominasi yang diperkenalkan Hernando dkk. [4].

Hasil-hasil penelitian tentang dimensi partisi graf merupakan jembatan untuk menentukan dimensi partisi dominasi suatu graf. Hal ini disebabkan karena berdasarkan nilai dimensi partisi suatu graf $G$, kemungkinan nilai dimensi partisi dominasi graf $G$ hanya ada dua, yaitu dimensi partisi dominasi graf $G$ sama dengan dimensi partisinya atau dimensi partisinya ditambah satu

Untuk topik dimensi partisi graf, beberapa graf dalam kelas pohon telah diketahui dimensi partisinya. Chartrand dkk telah memberikan dimensi partisi untuk graf bintang dan graf bintang ganda serta batas atas dan batas bawah dimensi partisi graf ulat [3]. Darmaji memberikan dimensi partisi graf ulat, graf kembang api dan graf pohon pisang [5].

## 2. KAJIAN TEORI

### 2.1 Definisi dan Terminologi

Suatu graf $G$ adalah pasangan terurut himpunan $(V, E)$ dengan $V$ adalah himpunan tak kosong, dan $E$ adalah himpunan (memungkin-kan kosong) pasangan tak terurut anggota himpunan $V$. Notasi $V(G)$ dan $E(G)$ berturut-turut menyatakan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $G$. Anggota $V(G)$ disebut *titik* di $G$ dan anggota $E(G)$ disebut *sisi* di $G$ [6]. Kardinalitas $V(G)$ atau banyaknya titik graf $G$ adalah *orde* graf $G$, sedangkan kardinalitas $E(G)$ atau banyaknya sisi graf $G$ adalah *ukuran* graf $G$. Graf $H$ merupakan *subgraf* dari graf $G$ jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

Misalkan $s, t \in V(G)$, titik $s$ dikatakan *bertetangga* dengan titik $t$ jika ada suatu sisi antara $s$ dan $t$, sisi tersebut dinotasikan dengan $st$. Jika setiap dua titik pada graf $G$ bertetangga, maka $G$ disebut *graf lengkap*. Misalkan $e = st \in E(G)$. Sisi $e$ dikatakan *melekat* pada titik $s$ dan titik $t$. Banyaknya sisi yang melekat pada suatu titik $s$ adalah *derajat* titik $s$, dinotasikan dengan $\deg(s)$. Jika setiap titik pada suatu graf $G$ berderajat $k$, maka $G$ disebut graf teratur$-k$. Suatu graf teratur$-2$ dengan $n$ titik dan $n$ sisi, dinamakan *siklus* berorde $n$ dinotasikan dengan $C_n$. Suatu graf yang diperoleh dari menghapus tepat satu sisi pada siklus $C_n$ dinamakan graf *lintasan* berorde $n$, dinotasikan dengan $P_n$. *Panjang lintasan* $P_n$ adalah banyaknya sisi pada lintasan $P_n$, yaitu $n-1$.

Suatu graf $G$ dikatakan *terhubung* jika untuk setiap dua titik sebarang $u$ dan $v$ di $G$, terdapat lintasan yang menghubungkan $u$ dan $v$. *Jarak* antara dua titik $s$ dan $t$ di $G$, dinotasikan dengan $d(s,t)$ adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan kedua titik tersebut di $G$. Selanjutnya, misalkan $W \subseteq V(G)$, jarak dari suatu titik $s$ ke $W$ di $G$ didefinisikan sebagai $d(s,W) = \min\{d(s,x) | x \in W\}$.

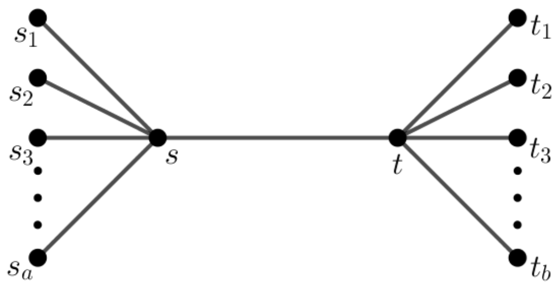
Suatu graf terhubung berode $n$ yang tidak memuat siklus dinamakan *graf pohon* orde $n$, dinotasikan dengan $T_n$. Misalkan $s$ adalah suatu titik di graf pohon. Jika $\deg(s) = 1$, maka $s$ dinamakan *titik daun*. Suatu sisi yang menempel pada titik daun disebut disebut *sisi daun*. Titik yang bertetangga dengan titik daun disebut *titik tangkai*.

**2.2 Dimensi Partisi**

Pada tahun 1998, Chartrand dkk. memperkenalkan konsep partisi pembeda. Mereka mengelompokkan semua titik di $G$ kedalam sejumlah kelas partisi, kemudian menentukan jarak antara setiap titik di $G$ dan setiap kelas partisi tersebut [5]. Misalkan $\Gamma = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ adalah suatu partisi terurut dari $V(G)$. *Representasi* titik $s \in V(G)$ terhadap partisi $\Gamma$, dinotasikan dengan $r(s|\Gamma)$, didefinisikan sebagai pasangan$-k$ terurut $\left(d(s,L_1), d(s,L_2), \dots, d(s,L_k)\right)$. Jika untuk setiap dua titik berbeda $s$ dan $t$ di $G$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap $\Gamma$, yaitu $r(s|\Gamma) \neq r(t|\Gamma)$, maka partisi $\Gamma$ dinamakan *partisi pembeda* dari $V(G)$. Suatu partisi dengan kardinalitas terkecil disebut sebagai *partisi pembeda minimum* di graf $G$. *Dimensi partisi* $\beta_p(G)$ graf $G$ adalah kardinalitas dari partisi pembeda minimum di $G$.

Beberapa graf dalam kelas pohon telah diketahui dimensi partisinya. Chartrand dkk. telah memberikan dimensi partisi untuk graf bintang dan graf bintang ganda serta batas atas dan batas bawah dimensi partisi graf ulat.

*Graf bintang* dengan $n+1$ titik, dinotasikan $K_{1,n}$ adalah graf pohon yang mempunyai sebuah titik (disebut: titik pusat) berderajat $n$ dan tepat $n$ buah titik berderajat satu. Chartrand dkk telah menunjukkan dimensi partisi graf bintang. Untuk graf bintang $K_{1,n}$ dimensi partisinya adalah $\beta_p\left(K_{1,n}\right) = n$ [7]. Begitu pula dengan graf bintang ganda. *Graf bintang ganda* adalah graf pohon yang mempunyai tepat dua titik $s$ dan $t$ berderajat lebih dari satu. Jika $s$ berderajat $a+1$ dan $t$ berderajat $b+1$, maka graf bintang ganda ini dinotasikan dengan $T(a,b)$. Gambar berikut adalah ilustrasi graf bintang ganda $T(a,b)$.




**Gambar 1**. Graf bintang ganda $T(a,b)$.

Chartrand dkk. telah memberikan dimensi partisi untuk graf bintang ganda. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

**Teorema 2.1.** [3] Misalkan $T(a,b)$ graf bintang ganda orde $n \geq 6$, dengan $s$ adalah titik yang berderajat $a+1$ dan titik $t$ berderajat $b+1$. Maka, $\beta_p\left(T(a,b)\right) = \max\{a,b\}$.

Darmaji juga melakukan penelitian tentang dimensi partisi graf kelas pohon. Hasilnya, Darmaji menunjukkan dimensi partisi untuk graf ulat, graf kembang api dan graf pohon pisang.

Graf ulat merupakan sebuah graf pohon yang mempunyai sifat apabila semua daunnya dihilangkan, graf pohon tersebut menjadi sebuah lintasan. Misalkan terdapat graf lintasan $P_m$ dengan himpunan titik $V(P_m) = \{x_1, \dots, x_m\}$ dan himpunan sisi $E(P_m) = \{x_1x_2, \dots, x_{m-1}x_m\}$. *Graf ulat* adalah graf pohon yang diperoleh dengan menambahkan $n_i$ buah sisi daun pada titik $x_i$ di graf lintasan $P_m$, dengan $1 \leq i \leq m$, dan dontasikan dengan $C(m; n_1, n_2, \dots, n_m)$. Jika $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = n$, maka graf ulat $C(m; n_1, n_2, \dots, n_m)$ disebut *homogen* dan notasinya ditulis $C(m; n)$ [3]. Perhatikan bahwa,

**Teorema 2.2.** [3] *Misalkan $K_{1,n_{maks}}$ adalah subgraf ulat maksimum dari $C(m; n_1, n_2, \dots, n_m)$ dan $p$ menyatakan banyak subgraph $K_{1,n_{maks}}$. Maka, untuk $n_{maks} \geq 3$, dimensi partisi graf ulat $C(m; n_1, n_2, \dots, n_m)$ adalah:*

*(i) $n_{maks}$ jika $p \leq n_{maks}$; atau*

*(ii) $n_{maks} + 1$ jika $p > n_{maks}$*

Berdasarkan teorema di atas, diperoleh akibat berikut ini.

**Akibat 2.3** [3] *Jika $C(m; n)$ adalah graf ulat homogen yang dibangun dengan menambahkan $n$ buah sisi daun pada setiap simpul pada lintasan Pm, dengan $n \geq 3$, maka dimensi partisi graf ulat homogen $\beta_p(C(m; n))$ adalah:*

*(i) $n$, jika $m \leq n$; atau*

*(ii) $n + 1$, jika $m \leq n$*

Untuk graf ulat homogen $C(m; n)$ dengan $n = 1$ dan $m \leq 2$, yaitu $C(1; 1)$ dan $C(2; 1)$, diperoleh $\beta_p(C(1; 1)) = \beta_p(C(2; 1)) = 2$ karena kedua graf tersebut adalah graf lintasan.

*Graf kembang api* adalah sebuah graf yang diperoleh dengan menghubungkan $m$ buah graf bintang $K_{1,n_i}$, caranya adalah menghubungkan satu titik daun dari setiap graf bintang $K_{1,n_i}$ dengan $1 \leq i \leq m$ [8]. Dimensi partisi graf kembang api telah ditunjukkan oleh Darmaji sebagai

**Teorema 2.4.** [3] *Misalkan $p$ menyatakan banyak subgraf $K_{1,n_{maks}}$ pada graf $F(m; n_1, n_2, \dots, n_m)$. Maka, untuk $n_{maks} \geq 5$ dan $m \geq 2$, $\beta_p(F(m; n_1, n_2, \dots, n_m))$ adalah*

(i) $n_{maks} - 1$, jika $p \leq n_{maks} - 1$; atau

(ii) $n_{maks}$, jika $p > n_{maks} - 1$.

Perhatikan bahwa, graf kembang api $F(1; n)$ adalah graf bintang $K_{1,n}$ dan graf $F(2; n)$ adalah graf bintang $K_{1,n}$

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini, dibahas dimensi partisi dominasi graf kelas pohon,yaitu graf bintang ganda, graf ulat, graf kembang api, dan graf pohon pisang. Teorema berikut menyatakan dimensi partisi dominasi graf bintang ganda.

**Teorema 3.1.**
*Misalkan $T(s, t)$ adalah graf bintang ganda orde $n \geq 5$, dengan $u$ titik berderajat $s + 1$ dan $v$ titik berderajat $t + 1$. Maka $\eta_p(T(s, t)) = max\{s, t\} + 1$.*

***Bukti:*** Misalkan $T(s, t)$ adalah graf bintang ganda orde $n \geq 5$, dengan $u$ titik berderajat $s + 1$ dan $v$ titik berderajat $t + 1$.

Asumsikan $s \geq t$. Misalkan $u_1, u_2, \dots, u_s$ adalah liontin yang bertetangga dengan cuping $u$, dan $v_1, v_2, \dots, v_t$ adalah liontin yang bertetangga dengan cuping $v$.Perhatikan bahwa, $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ adalah himpunan liontin. Berdasarkan Lema 2.1 poin (3), maka diperoleh $s + 1 \leq \eta_p(T(s, t))$ Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\eta_p(T(s, t)) \leq s + 1$. Pandang dua kasus berikut:

**Kasus 1. Untuk $s = t$.**

Definisikan suatu partisi terurut dari $V(T(s, t))$, yaitu $\Gamma_1 = \{B_1, B_2, \dots, B_s, B_{s+1}\}$ dengan $B_1 = \{u_1, v\}$, $B_2 = \{u, v_1\}$, dan $B_i = \{u_{i-1}, v_{i-1}\}$ dengan $i \in [3, s + 1]$. Sekarang, akan ditunjukkan bahwa $\Gamma_1$ adalah suatu partisi pembeda mendominasi. Tinjau representasi semua titik pada masing-masing kelas partisi. Untuk $u_1$ dan $v$ dalam $L_1$, $r(u_1|\Gamma) = (0,1,2, \dots, 2)$ dan $r(v|\Gamma) = (0,1,1, \dots, 1)$. Untuk $u$ dan $v_1$ dalam $L_2$, $r(u|\Gamma) = (1,0,1,1, \dots, 1)$ dan $r(v_1|\Gamma) = (1,0,2,2, \dots, 2)$. Untuk semua $i \in [3, s + 1]$, representasi $u_{i-1}$ dan $v_{i-1}$ dalam $L_i$ adalah $r(u_{i-1}|\Gamma) = (2,1,2, \dots, 2, 0_i, 2, \dots, 2)$ dan $r(v_{i-1}|\Gamma) = (1,2,2, \dots, 2, 0_i, 2, \dots, 2)$ dengan urutan ke- $i$ pada representasi titik $u_{i-1}$ atau $v_{i-1}$ adalah angka 0.

Berdasarkan uraian di atas, jelas bahwa semua titik mempunyai representasi yang berbeda terhadap partisi $\Gamma_1$. Lebih lanjut, setiap representasi titik di $T(s,t)$ mengadung angka satu, hal ini mengindikasikan bahwa partisi $\Gamma$ adalah suatu partisi mendominasi. Oleh karena itu, partisi $\Gamma_1$ adalah suatu partisi pembeda mendominasi. Jadi, untuk kasus $s = t$, disimpulkan bahwa $\eta_p(T(s,t)) \leq s+1$.

**Kasus 2. Untuk $s > t$.**

Dalam kasus ini, terdapat dua kondisi yang mungkin terjadi. Kondisi-kondisi ini dijabarkan dalam dua subkasus berikut:

**Subkasus 2.1. Untuk $t = 1$.**

Perhatikan bahwa, karena $T(s,t)$ berorde $n \geq 5$ dan $t = 1$, maka $s \geq 2$. Selanjutnya, definisikan suatu partisi terurut dari $V\big(T(s,t)\big)$, yaitu $\Gamma_2 \coloneqq \{B_1, B_2, \dots, B_s, B_{s+1}\}$ dengan $B_1 = \{u,v\}$, $B_2 = \{u_1, v_1\}$ dan $B_i = \{u_{i-1}\}$ untuk semua $i \in [3, s+1]$. Perhatikan bahwa, semua titik di $T(s,t)$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap partisi $\Gamma_2$. Untuk $u$ dan $v$ dalam $B_1$, $r(u|\Gamma_2) = (0,1,1,\dots,1)$ dan $r(v|\Gamma_2) = (0,1,2,\dots,2)$. Untuk $u_1$ dan $v_1$ dalam $L_2$, $r(u_1|\Gamma_2) = (1,0,2,2,\dots,2)$ dan $r(v_1|\Gamma_2) = (1,0,3,3,\dots,3)$. Untuk semua $i \in [3, s+1]$, representasi $u_{i-1}$ dalam $L_i$ adalah $r(u_{i-1}|\Gamma_2) = (1,2,\dots,2,0_i,2,\dots,2)$ dengan angka urutan ke- $i$ pada representasi titik $u_{i-1}$ adalah angka 0. Dalam uraian di atas, jelas semua titik di $T(s,t)$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap partisi $\Gamma_2$. Berarti, partisi $\Gamma_2$ adalah suatu partisi pembeda di $T(s,t)$. Lebih lanjut, representasi setiap titik di $T(s,t)$ terhadap partisi $\Gamma_2$ mengandung angka 1, sehingga disimpulkan bahwa partisi $\Gamma_2$ adalah suatu partisi mendominasi. Jadi, untuk kasus $s > t$ dengan $t = 1$, partisi $\Gamma_2$ adalah suatu partisi pembeda mendominasi.

**Subkasus 2.2. Untuk $t \geq 2$.**

Definisikan suatu partisi terurut dari $V\big(T(s,t)\big)$, yaitu $\Gamma_3 \coloneqq \{B_1, B_2, \dots, B_s, B_{s+1}\}$ dengan $B_1 = \{u,v\}$, $B_2 = \{u_1, v_1\}$, $B_{i+1} = \{u_i, v_i\}$ untuk semua $i \in [2,t]$, dan $B_j = \{u_{j-1}\}$ untuk semua $j \in [t+2, s+1]$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa partisi $\Gamma_3$ adalah suatu partisi pembeda mendominasi. Perhatikan bahwa, $r(u|\Gamma_3) = (0,1,1,\dots,1)$ dan $r(v|\Gamma_3) = (0,1_2,\dots,1_t,1_{t+1},2_{t+2},\dots,2_s,2_{s+1})$. Untuk $u_1$ dan $v_1$ dalam kelas partisi $B_2$, $r(u_1|\Gamma_3) = (1,0,2,2,\dots,2)$ dan $r(v_1|\Gamma_3) = (1,0,2_3,\dots,2_t,2_{t+1},3_{t+2},\dots,3_s,3_{s+1})$. Untuk semua $j \in [t+2, s+1]$, representasi titik $u_{j-1}$dalam kelas partisi $B_j$ adalah $r\big(u_{j-1}|\Gamma_3\big) = (1,2,\dots,2,0_j,2,\dots,2)$ dengan elemen urutan ke$-j$ pada representasi titik $u_{i-1}$ adalah angka 0. Dalam uraian di atas, terlihat bahwa semua titik di $T(s,t)$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap partisi $\Gamma_3$. Selain itu, representasi setiap titik mempunyai unsur angka 1. Berarti $\Gamma_3$ adalah suatu partisi pembeda mendominasi dari $T(s,t)$.

Berdasarkan uraian kasus-kasus di atas, diperoleh bahwa $\eta_p(T(s,t)) \leq s+1$. Dengan demikian, disimpulkan bahwa $\eta_p(T(s,t)) = s+1$.

## 4. KESIMPULAN

Penelitin ini berhasil menunjukkan dimensi partisi dominasi graf kelas pohon. Dimensi partisi dari empat buah graf dalam kelas pohon, yaitu graf bintang ganda, graf ulat, graf kembang api dan graf pohon pisang. Dimensi partisi graf bintang ganda $T(s,t)$ adalah $s+1$. Dimensi partisi dominasi graf ulat $C(m; n_1, n_2, \dots, n_m)$ adalah (i) $n_{maks}+1$ jika $p \leq n_{maks}$, atau (ii) $n_{maks}+1$ jika $p > n_{maks}$, dengan $p$ menyatakan jumlah subgraf ulat maksimum. Selanjutnya, kami memperoleh dimensi partisi dominasi graf kembang api $F(m; n_1, n_2, \dots, n_m)$. yaitu (i) $n_{maks}$ jika $p \leq n_{maks}$, atau (ii) $n_{maks}+1$ jika $p > n_{maks}$, dengan $p$ menyatakan jumlah subgraf kembang api maksimum. Untuk $n \geq 2$, dimensi partisi dominasi dari graf pohon pisang $B(m;n)$ adalah (i) $n$ jika $m \leq n-2$, atau (ii) $n+1$ jika $n-2 < m \leq \binom{n}{n-1}(n-1)$).

## 5. DAFTAR PUSTAKA


[1] F. Harary and R. A. Melter, "On the metric dimension of a graph," Ars Combinatoria, vol. 2, pp. 191–195, 1976.

[2] X. Bin dan Z. Zhongyi, "Graph theory: In mathematical olympiad and competitions," World Scientific Publishing Company, vol. 3, 2010.

[3] G. Chartrand, E. Salehi, and P. Zhang, "On the partition dimension of a graph," Congressus Numerantium, vol. 130, pp. 157–168, 1998.

[4] C. Hernando, M. Mora, and I. M. Pelayo, "Resolving dominating partitions in graphs," Discrete Applied Mathematics, vol. 266, pp. 237–251, 2019.
[5] N. Hartsfield dan G. Rigel, (1994). *Pearls in graph theory: a comprehensive introduction*. Courier Corporation, 1994.
[6] Darmaji, “Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung,” Disertasi, Jurusan Matematika, Institut Teknologi Bandung, Bandung, Indonesia, 2011.
[7] G. Chartrand, E. Salehi, dan P. Zhang, "The partition dimension of a graph," Aequationes Math, vol. 59, pp. 45–54, 2000.
[8] W. C. Chen, H. I. Lu, dan Y. N. Yeh, “Operations of interlaced trees and graceful trees”, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, vol 21(4), pp.337 – 348, 1997.