MENENTUKAN CIRI-CIRI SPESIFIK METODE PENYELESAIAN LIMIT FUNGSI ALJABAR PADA BENTUK TAK TENTU

Try Azisah Nurman*
*) Dosen Pada Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Alauddin Makassar
e-mail: chicha_chirwan@yahoo.com

Abstract: *This paper discusses the methods of algebraic functions on the settlement limit of indeterminate forms. Limit is a mathematical method used to describe the effect of variable functions move closer to a point on a particular function. The goal is to determine the specific characteristics of the methods of algebraic functions on the settlement limit of indeterminate forms. The methods used is a special method that consists of factoring methods, methods of multiplication herd, and the division with the highest rank method, and the method of L' Hopital. By using the methods mentioned above, then we obtain the specific characteristics of the methods of algebraic functions settlement limit on the indeterminate form are 1. Factoring methods: (a) The numerator is the result of squaring the binomial equation of the denominator. Where, (i) If the binomial equation using the difference operation, then its points is positive. (ii) If the binomial equations using addition operation, then its points is negative. (b) the constant factor of each of the numerator and denominator equally. One of which is a three tribal equation in the form* $ax^2 + bx + c$ *, the value of b it is the sum of the value of the constant multiplication. (c) If the numerator and denominator are both binomial equations with difference operation, where the variables and constants in the numerator is the square of the variable and constant denominator. Or conversely, variables and constants in the denominator is the square of the variable and constant numerator. (d) If the equation is a difference of two fractions where the denominator is a binomial variables and constants in the denominator is the result of one of the squaring of the variables and constants in the denominator of the other. (e) If the equation in the form of fragments which all contain the same variables. (f) If the equation is in the form of two parts, where the coefficients and constants in the numerator or the same multiplication factor, so that when the coefficients and constants removed it will form one of the factors that equation equal to that of the denominator. 2. A herd Multiplication method: (a) If the equation is the difference of two roots. (b) If the equation in the form of the difference or fractions containing amount root form. Both the* *numerator and the denominator. 3. Distribution by Top Rank methods: (a) If the equation in the form ∞/∞. (b) If a polynomial equation of degree 3, 4, 5,... etc. Which is hard to be factored. 4. L' Hopital method: if the limit point is substituted then produces the indeterminate form 0/0, ∞/∞, ∞-∞ , except if the derivative of the function at the root of the denominator in the form similar to the form factor function in the numerator. Vice versa, the derivative of the function at the root of the numerator shaped form factor similar to the function in the denominator.*

Key words: *Limit, indeterminate forms, L' Hopital method.*

I. PENDAHULUAN

Kalkulus adalah salah satu cabang dari matematika yang sangat penting dan banyak diterapkan pada cabang-cabang ilmu pengetahuan lainnya, seperti: sains dan teknologi, kedokteran, perekonomian, dan sebagainya. Kalkulus pada umumnya dikembangkan dengan memanipulasi sejumlah kuantitas yang sangat kecil. Pada abad ke-19, konsep kecil tak terhingga ini ditinggalkan karena tidak cukup cermat, sebaliknya ia digantikan oleh konsep limit. Limit menjelaskan nilai suatu fungsi pada nilai input tertentu dengan hasil dari nilai input terdekat. Dari sudut pandang ini pula, kalkulus didefinisikan sebagai sekumpulan teknik memanipulasi limit-limit tertentu.

Pada umumnya terdapat dua bentuk persamaan limit fungsi aljabar yang sering digunakan, yaitu limit fungsi aljabar yang variabelnya mendekati nilai tertentu. Bentuk ini dapat diselesaikan dengan 4 cara yaitu cara substitusi, pemfaktoran, merasionalkan penyebut, dan merasionalkan pembilang. Dan bentuk yang kedua adalah limit fungsi aljabar yang variabelnya mendekati tak terhingga. Bentuk ini dapat diselesaikan dengan 2 cara yaitu membagi dengan pangkat tertinggi dan mengalikan dengan faktor sekawan atau dengan menggunakan cara L'Hopital.

Metode substitusi digunakan untuk mencari nilai limit fungsi aljabar yang tidak mengandung bentuk tak tentu. Adapun bentuk-bentuk tak tentu yang dimaksud adalah tak tentu jenis $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ dan $\infty - \infty$. Untuk bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$, digunakan metode pemfaktoran. Namun adakalanya limit fungsi aljabar yang mengandung bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ harus dikalikan dulu dengan bentuk sekawannya. Bentuk yang memerlukan perlakuan demikian yaitu yang mengandung bentuk akar. Sedangkan untuk bentuk tak tentu $\frac{\infty}{\infty}$ dapat diselesaikan dengan cara membaginya dengan pangkat tertinggi. Dan bentuk tak tentu ∞-∞ diselesaikan dengan cara mengalikannya terlebih dahulu dengan faktor sekawannya.

Tetapi tidak semua persoalan limit fungsi dapat diselesaikan dengan cara substitusi, pemfaktoran, perkalian sekawan, ataupun pembagian dengan pangkat tertinggi. Ada cara lain untuk menyelesaikan persoalan seperti ini yaitu dengan menggunakan aturan L'Hopital. Aturan L'Hopital adalah cara terakhir yang dapat digunakan untuk memperoleh nilai limitnya apabila cara substitusi, pemfaktoran, perkalian sekawan, ataupun pembagian dengan pangkat tertinggi tidak dapat dilakukan. Aturan L'Hopital adalah suatu aturan dalam menyelesaikan masalah limit agar nilai limitnya ada, dengan cara menurunkan fungsi yang dilimitkan kemudian mensubstitusikan titik limit yang telah ditentukan.

Bentuk-bentuk tak tentu seperti yang telah dijelaskan sebelumnya sangat perlu untuk dikaji. Karena bentuk-bentuk tak tentu memiliki cara yang beda dalam penyelesaiannya dengan bentuk-bentuk tentu yang bisa dilakukan substitusi langsung untuk mendapatkan nilai limitnya. Namun, tidak semua persoalan limit dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan L'Hopital. Ada beberapa contoh soal yang sama sekali tidak bisa diselesaikan dengan menggunakan aturan L'Hopital.

Mempelajari konsep limit fungsi aljabar secara lebih mendalam sangat diperlukan. Konsep limit fungsi yang dimaksud adalah tentang nilai suatu fungsi, cara mensketsa grafik fungsi, pensubstitusian, pemfaktoran, dan bilangan sekawan. Dalam beberapa buku kalkulus, hal ini juga belum banyak dijelaskan.

II. KAJIAN TEORITIS

A. *Limit Fungsi*

Limit adalah suatu metode matematika yang digunakan untuk menjelaskan pengaruh variabel fungsi yang bergerak mendekati suatu titik terhadap fungsi tertentu.

Limit fungsi ini merupakan salah satu konsep mendasar dalam analisis tentang suatu fungsi yang mendekati titik tertentu. Suatu fungsi memetakan $f(x)$ untuk setiap x dan fungsi tersebut memiliki limit L pada titik p. Bila $f(x)$ mendekati L maka x juga mendekati p. Dengan kata lain, $f(x)$ menjadi semakin dekat kepada L ketika x juga mendekat menuju p. Lebih jauh lagi, bila f diterapkan pada tiap masukan yang *cukup* dekat pada p, hasilnya adalah keluaran yang (secara sembarang) dekat dengan L. Bila masukan yang *dekat* pada p ternyata dipetakan pada keluaran yang sangat berbeda, fungsi f dikatakan tidak memiliki limit.

Konsep limit fungsi merupakan dasar untuk mempelajari kalkulus. Dalam hal ini pengertian limit fungsi pertama kali diberikan secara langkah demi langkah, yang membahas tentang cara menghitung nilai suatu fungsi yang mendekati suatu bilangan yang disajikan secara intuitif dari proses limit. Sebagai contoh, akan dipandang fungsi *f* yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

Kemudian akan diperiksa bahwa $f(x)$ terdefinisi untuk setiap x kecuali x = 1. Akan diselidiki nilai fungsi *f* bilamana mendekati 1 tetapi tidak sama dengan 1. Ilustrasi berikut ini menunjukkan bagaimana fungsi yang didefinisikan oleh persamaan di atas dapat dibangun dan mengapa nilai fungsinya harus diperhatikan. Untuk fungsi *f* yang didefinisikan oleh persamaan di atas, misalkan untuk nilai x diambil 0; 0,25; 0,50; 0,75; 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999 dan seterusnya. Diambil nilai x yang semakin dekat ke 1 tetapi lebih kecil dari 1. Dengan kata lain, peubah x mendekati 1 sepanjang nilai yang lebih kecil dari 1. Sekarang misalkan peubah x mendekati 1 sepanjang nilai yang lebih besar dari 1, yaitu untuk x diambil nilai 2; 1,75; 1,5; 1,25; 1,1; 1,01; 1,001; 1,0001; 1,00001 dan seterusnya.

Cara yang lebih tepat untuk mengerti tentang limit adalah dengan menggunakan dua lambang untuk menyatakan perbedaan kecil ini. Lambang yang biasanya digunakan adalah huruf *Yunani* ε (epsilon) dan δ (delta). Jadi dapat dinyatakan bahwa untuk setiap bilangan positif ε yang diberikan terdapat suatu bilangan positif δ yang dipilih yang sesuai sehingga bila $|x - 1|$ lebih kecil daripada δ dan $|x - 1| \neq 1$ (yaitu $x \neq 1$), maka $|f(x) - 5|$ akan lebih kecil dari ε. Hal penting yang patut disadari adalah bahwa ukuran δ bergantung pada ukuran ε.

***Definisi* 2.1**

Misalkan *f* suatu fungsi yang terdefinisi pada setiap bilangan pada suatu selang terbuka yang memuat *a*, kecuali mungkin di bilangan *a* sendiri. Limit $f(x)$ untuk x mendekati *a* adalah *L*, ditulis

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

jika pernyataan berikut ini benar:

Diberikan ε > 0 yang bagaimanapun kecilnya, terdapat suatu δ > 0 sehingga jika

$$\mathbf{0 < |x - a| < \delta \text{ maka } |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Dengan kata lain, Definisi 2.1 menyatakan bahwa nilai fungsi $f(x)$ mendekati suatu limit *L* untuk mendekati suatu bilangan *a* jika nilai mutlak perbedaan $f(x)$ dan *L* dapat dibuat sekecil yang diinginkan dengan cara mengambil *x* yang cukup dekat ke *a* tetapi tidak sama dengan *a*. Hal yang perlu diingat ialah bahwa definisi di atas tidak dikatakan tentang nilai fungsi *f* bilamana *x* = *a*.

Untuk menafsirkan |*x* – *a*|, bayangkan *x* dan *a* sebagai vektor-vektor. Maka,

$$|x - a| = \sqrt{(x-a)^2}$$

dan titik-titik yang memenuhi 0 < |*x* – *a*| < δ adalah titik-titik dalam suatu lingkaran dengan radius δ terkecuali pusat *a*.

Secara umum, untuk mencari nilai-nilai limit fungsi aljabar yang mengandung bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ digunakan metode pemfaktoran. Jadi, jika dilakukan substitusi langsung dan diperoleh hasil limit dalam bentuk $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, maka yang harus dilakukan adalah mengupayakan agar fungsi *f(x)* dan *g(x)* memiliki faktor yang sama. Adakalanya sebuah limit fungsi aljabar yang mengandung bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ harus dikalikan terlebih dahulu dengan bentuk sekawannya sebelum difaktorkan. Bentuk yang memerlukan perlakuan seperti itu adalah apabila *f(x)* atau *g(x)* mengandung bentuk akar.

Adapula bentuk limit fungsi aljabar yang apabila dilakukan substitusi secara langsung akan menghasilkan bentuk $\frac{\infty}{\infty}$. Oleh karena itu, untuk mencari nilai limit fungsi aljabarnya perlu dilakukan manipulasi aljabar. Manipulasi aljabar yang dimaksud adalah dengan membagi setiap suku-suku pada *f(x)* dan *g(x)* dengan pangkat tertinggi dari *x*. Bentuk lain yang sering ditemukan apabila dilakukan substitusi langsung pada persamaan limit fungsi aljabar adalah ∞ - ∞. Untuk menentukan nilai limitnya dilakukan juga manipulasi aljabar, yaitu dengan mengalikannya terlebih dahulu dengan faktor sekawannya setelah itu barulah dilakukan pemfaktoran seperti langkah-langkah sebelumnya.

Setelah menggolongkan beberapa persoalan limit sebagai bentuk tak tentu, maka bentuk tak tentu tersebut dapat disimbolkan dengan menggunakan tiga simbol yakni $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, dan ∞-∞. Masing-masing bentuk melibatkan persaingan kekuatan yang berlawanan, yang berarti bahwa hasilnya tidak jelas terlihat. Akan tetapi, dengan bantuan aturan L'Hopital, yang hanya diterapkan secara langsung pada bentuk $\frac{0}{0}$ dan $\frac{\infty}{\infty}$, biasanya dapat ditentukan harga limit yang tepat.

Perlu diingat, masalah limit muncul pada bilangan-bilangan tidak tentu seperti $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, dan ∞-∞. Disamping itu perlu diketahui bahwa gabungan bilangan tertentu dan tidak tentu juga merupakan bilangan tidak tentu. Salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan limit bentuk tak tentu yaitu dengan menggunakan dalil L'Hopital berikut:

$$\text{limit}\,\frac{f(x)}{g(x)} = \text{limit}\,\frac{f'(x)}{g'(x)} = \text{limit}\,\frac{f''(x)}{g''(x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ dan seterusnya}$$

$$\text{bila} \begin{cases} limit\ f(x) = 0 \\ limit\ g(x) = 0 \end{cases} atau \begin{cases} limit\ f(x) = \infty \\ limit\ g(x) = \infty \end{cases}$$

Dari dalil tersebut berarti yang dapat menggunakan dalil L'Hopital hanya bentuk $\frac{0}{0}$ dan $\frac{\infty}{\infty}$. Untuk bentuk-bentuk yang lain harus diubah menjadi $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ kalau akan menggunakan aturan L'Hopital.

B. ***Bentuk*** $\left(\frac{0}{0}\right)$

Limit ini dapat diselesaikan dengan *memfaktorkan pembilang* dan *penyebutnya*, kemudian *"mencoret"* faktor yang sama, lalu *substitusikan nilai* $x = a$.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)P(x)}{(x-a)Q(x)} = \lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

1. Karena $x \to a$, maka $(x-a) \to 0$ sehingga pembilang dan penyebut boleh dibagi dengan $(x - a)$
2. Nilai limitnya ada dengan syarat : $Q(a) \neq 0$
3. Jika pembilang atau penyebutnya memuat *bentuk akar*, maka sebelum difaktorkan dikalikan dulu dengan *bentuk sekawannya*.

C. ***Limit Bentuk*** $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Limit ini dapat diselesaikan dengan *membagi pembilang dan penyebut dengan variabel pangkat tertinggi atau dengan menggunakan dalil L'Hopital*, kemudian digunakan rumus :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a}{x} = 0.$$

D. ***Limit Bentuk*** $(\infty - \infty)$

Limit ini umumnya memuat bentuk akar:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$$

Cara Penyelesaian :

1. Kalikan dengan bentuk sekawannya.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} \left(\frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - g(x)}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}$$

2. Bentuknya berubah menjadi $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
3. Selesaikan seperti pada limit bentuk $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. *Metode Pemfaktoran*

1. Hitunglah nilai limit dari

$$\lim_{x \to 0} \frac{6x^2 - 4x}{2x^2 + x}$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 0} \frac{6x^2 - 4x}{2x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(6x - 4)}{x(2x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{6x - 4}{2x + 1}$$

$$= \frac{6(0) - 4}{2(0) + 1} = \frac{-4}{1} = -4$$

2. Tentukan nilai limit dari

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{2}{x^2 - 4} - \frac{3}{x^2 + 2x - 8} \right)$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{2}{x^2 - 4} - \frac{3}{x^2 + 2x - 8} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{2(x + 4) - 3(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)(x + 4)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)(x + 4)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-1}{(x + 2)(x + 4)}$$

$$= -\frac{1}{(2 + 2)(2 + 4)}$$

$$= -\frac{1}{(4)(6)}$$

$$= -\frac{1}{24}$$

B. *Metode Perkalian Sekawan*

1. Hitunglah nilai limit dari

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2 - \sqrt{4x + 4})}{x}$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2 - \sqrt{4x + 4})}{x}$$

Dikalikan dengan sekawannya, maka diperoleh

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2-\sqrt{4x+4})}{x} \times \frac{(2+\sqrt{4x+4})}{(2+\sqrt{4x+4})} = \lim_{x\to 0}\frac{4-(4x+4)}{x(2+\sqrt{4x+4})} = \lim_{x\to 0}\frac{-4x}{x(2+\sqrt{4x+4})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-4}{2+\sqrt{4x+4}} = \frac{-4}{2+\sqrt{4(0)+4}} = \frac{-4}{2+\sqrt{4}}$$

$$= \frac{-4}{2+2}$$

$$= \frac{-4}{4}$$

$$= -1$$

2. Tentukanlah nilai limit dari

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2-3x+1}-\sqrt{4x^2-5x-2}$$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan metode perkalian sekawan, diperoleh

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2-3x+1}-\sqrt{4x^2-5x-2} \times \frac{\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-3x+1}+\sqrt{4x^2-5x-2})}{\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-3x+1}+\sqrt{4x^2-5x-2})}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2-3x+1)-(4x^2-5x-2)}{\sqrt{4x^2-3x+1}-\sqrt{4x^2-5x-2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-3x+1+5x-2}{\sqrt{4x^2-3x+1}+\sqrt{4x^2-5x-2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(-3+5)x-1-2}{\sqrt{4x^2-3x+1}+\sqrt{4x^2-5x-2}}$$

Pembilang dan penyebut dibagi dengan pangkat tertinggi dari penyebut yaitu *x*

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(-3+5)x}{x^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(-3+5)}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4-\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}}$$

$$= \frac{\frac{(-3+5)}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}-\frac{2}{\infty^2}}{\sqrt{4-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}+\sqrt{4-\frac{5}{\infty}-\frac{2}{\infty^2}}}$$

$$= \frac{0-0-0}{\sqrt{4-0+0}+\sqrt{4-0-0}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{4} + \sqrt{4}}$$

$$= \frac{0}{2\sqrt{4}} \quad = 0$$

C. *Metode Pembagian dengan Pangkat Tertinggi*

1. Tentukanlah nilai limit dari

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 + 2x^3 - 5x + 4}{2x^4 - 4x^2 + 9}$$

   Penyelesaian:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 + 2x^3 - 5x + 4}{2x^4 - 4x^2 + 9}$$

   $masing2\ dibagi\ dengan\ x^4$

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^4}{x^4} + \frac{2x^3}{x^4} - \frac{5x}{x^4} + \frac{4}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4} - \frac{4x^2}{x^4} + \frac{9}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^3} + \frac{4}{x^4}}{2 - \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^4}}$$

   $$= \frac{3 + 0 - 0 + 0}{2 - 0 + 0}$$

   $$= \frac{3}{2}$$

2. Hitunglah nilai limit dari

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x + 10}{5x^3 + 3x - 2}$$

   Penyelesaian:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x + 10}{5x^3 + 3x - 2}$$

   Masing-masing dibagi dengan x^3, maka diperoleh

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{10}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3} + \frac{3x}{x^3} - \frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{10}{x^3}}{5 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}}$$

   $$= \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x\to\infty} \frac{10}{x^3}}{\lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^2} - \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^3}}$$

   $$= \frac{0 - 0 + 0}{5 + 0 - 0}$$

   $$= \frac{0}{5}$$

   $$= 0$$

D. *Metode L'Hopital*

1. Tentukan nilai limit dari

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x-2}+\frac{x^2-2x}{2x-4}$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x-2}+\frac{x^2-2x}{2x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{4x}{1}+\frac{2x-2}{2}$$

$$=\frac{4(2)}{1}+\frac{2(2)-2}{2}$$

$$=8+1=9$$

2. Hitunglah nilai limit dari

$$\lim_{x\to 3}\frac{16-(x^2+7)}{4-\sqrt{x^2+7}}$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 3}\frac{16-(x^2+7)}{4-\sqrt{x^2+7}}=\lim_{x\to 3}\frac{16-(x^2+7)}{4-(x^2+7)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-2x}{-\frac{1}{2}(x^2+7)^{-\frac{1}{2}}(2x)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-2x}{-x\,(x^2+7)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-2x}{-x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+7}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+7}}\right)}$$

$$=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3^2+7}}}$$

$$=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{16}}}$$

$$=\frac{2}{\frac{1}{4}}$$

$$=8$$

3. Tentukanlah nilai limit dari

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 + 2x^3 - 5x + 4}{2x^4 - 4x^2 + 9}$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 + 2x^3 - 5x + 4}{2x^4 - 4x^2 + 9}$$

dengan menggunakan aturan L'Hopital diperoleh:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 + 2x^3 - 5x + 4}{2x^4 - 4x^2 + 9} = \lim_{x\to\infty} \frac{12x^3 + 6x^2 - 5}{8x^3 - 8x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{36x^2 + 12x}{24x^2 - 8}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{72x + 12}{48x}$$

$$= \frac{72}{48}$$

$$= \frac{3}{2}$$

Tidak bisa Menggunakan Metode L'Hopital

- Tentukan nilai limit dari

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan aturan L'Hopital, diperoleh

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 3)^{-\frac{1}{2}}(2x + 2)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}{\frac{1}{2}(2x + 2)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}{x + 1}$$

di L'Hopitalkan kembali menjadi,

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 3)^{-\frac{1}{2}}(2x + 2)}{1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}(2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

Soal seperti diatas tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan L'Hopital, karena setelah dilakukan aturan L'Hopital maka akan kembali lagi ke bentuk semula.

Untuk menyelesaikan persoalan seperti ini, maka harus dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

Masing-masing pembilang dan penyebutnya diuraikan seperti berikut,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

IV. PEMBAHASAN

A. *Metode Pemfaktoran*

Adapun ciri-ciri spesifik untuk metode pemfaktoran yaitu apabila pembilangnya merupakan hasil pengkuadratan persamaan suku dua dari penyebutnya atau sebaliknya, dengan syarat jika persamaan suku dua tersebut menggunakan operasi selisih, maka titik limitnya bernilai positif dan jika persamaan suku dua tersebut menggunakan operasi penjumlahan, maka titik limitnya bernilai negatif. Kemudian faktor dari konstanta pada masing-masing pembilang dan penyebutnya sama. Dimana salah satunya merupakan persamaan suku tiga berbentuk $ax^2 + bx + c$, yang nilai b nya adalah hasil penjumlahan dari nilai perkalian konstantanya. Apabila pembilang dan penyebutnya sama-sama merupakan persamaan suku dua dengan operasi selisih, dimana variabel dan konstanta pada pembilangnya adalah hasil kuadrat dari variabel dan konstanta pada penyebutnya. Atau sebaliknya, variabel dan konstanta pada penyebutnya adalah hasil kuadrat dari variabel dan konstanta pembilangnya. Apabila persamaannya berupa selisih dua pecahan dimana penyebutnya merupakan suku dua yang variabel dan konstanta pada salah satu penyebutnya adalah hasil pengkuadratan dari variabel dan konstanta pada penyebut yang lain. Apabila persamaannya berupa pecahan suku dua yang semuanya mengandung variabel yang sama. Apabila persamaannya berupa suku dua, dimana koefisien dan konstanta pada pembilangnya sama ataupun faktor kelipatannya, sehingga apabila koefisien dan konstantanya dikeluarkan maka akan terbentuk persamaan yang salah satu faktornya sama dengan yang ada pada penyebutnya.

B. *Metode Perkalian Sekawan*

Adapun ciri-ciri spesifik untuk metode perkalian sekawan yaitu apabila persamaannya berupa selisih dua buah akar seperti berikut:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{px^2+qx+r}$$

serta apabila persamaannya berbentuk pecahan yang memuat bentuk akar. Baik pada pembilangnya maupun pada penyebutnya.

C. *Metode Pembagian dengan Pangkat Tertinggi*

Adapun ciri-ciri spesifik untuk metode pembagian dengan pangkat tertinggi yaitu apabila persamaannya berbentuk $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

serta apabila pangkat tertinggi dari persamaannya berderajat 3, 4, 5, …dst yang sulit untuk difaktorkan. Meskipun untuk persamaan berderajat 1 dan 2 juga terkadang dapat diselesaikan dengan cara membagi dengan pangkat tertinggi.

D. *Metode L'Hopital*

Adapun ciri-ciri spesifik untuk metode L'Hopital yaitu apabila titik limitnya disubstitusi akan menghasilkan bentuk tak tentu yaitu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, kecuali jika hasil turunan dari fungsi pada penyebutnya yang berbentuk akar berupa faktor yang sama dengan fungsi pada pembilangnya.Begitupun sebaliknya, hasil turunan dari fungsi pada pembilangnya yang berbentuk akar berupa faktor yang sama dengan fungsi pada penyebutnya, maka persamaan seperti itu tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan metode L'Hopital.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

A. *Kesimpulan*

1. Metode Pemfaktoran

a. Pembilangnya merupakan hasil pengkuadratan persamaan suku dua dari penyebutnya atau sebaliknya. Dimana,
   1) Jika persamaan suku dua tersebut menggunakan operasi selisih, maka titiknya bernilai positif.
   2) Jika persamaan suku dua tersebut menggunakan operasi penjumlahan, maka titiknya bernilai negatif.

b. Faktor dari konstanta pada masing-masing pembilang dan penyebutnya sama. Dimana salah satunya merupakan persamaan suku tiga berbentuk $ax^2 + bx + c$, yang nilai *b* nya adalah hasil penjumlahan dari nilai perkalian konstantanya.

c. Apabila pembilang dan penyebutnya sama-sama merupakan persamaan suku dua dengan operasi selisih, dimana variabel dan konstanta pada pembilangnya adalah hasil kuadrat dari variabel dan konstanta penyebutnya. Atau sebaliknya, variabel dan konstanta pada penyebutnya adalah hasil kuadrat dari variabel dan konstanta pembilangnya.

d. Apabila persamaannya berupa selisih dua pecahan dimana penyebutnya merupakan suku dua yang variabel dan konstanta pada salah satu penyebutnya adalah hasil pengkuadratan dari variabel dan konstanta pada penyebut yang lain.

e. Apabila persamaannya berupa pecahan suku dua yang semuanya mengandung variabel yang sama.

f. Apabila persamaannya berupa suku dua, dimana koefisien dan konstanta pada pembilangnya sama ataupun faktor kelipatannya, sehingga apabila koefisien dan konstantanya dikeluarkan maka akan terbentuk persamaan yang salah satu faktornya sama dengan yang ada pada penyebutnya.

2. Metode Perkalian Sekawan

a. Apabila persamaannya berupa selisih dua buah akar.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{px^2+qx+r}$$

   1) $\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$ jika $a = p$
   2) ∞ jika $a > p$

3) -∞ jika $a < p$

b. Apabila persamaannya berupa selisih ataupun penjumlahan yang memuat bentuk akar. Baik pada pembilangnya maupun pada penyebutnya.

3. Metode Pembagian dengan Pangkat Tertinggi

a. Apabila persamaannya berbentuk $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

b. Apabila persamaannya berupa polynomial berderajat 3, 4, 5, …dst yang sulit untuk difaktorkan. Dimana, jika

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$$

maka:

1) $1.\ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0}$ untuk n = m

2) $2.\ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0}$ untuk n < m

3) $3.\ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0}$ untuk n > m

4. Metode L'Hopital

Adapun ciri-ciri spesifik untuk metode L'Hopital yaitu apabila titik limitnya disubstitusi maka menghasilkan bentuk tak tentu yaitu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞ - ∞, kecuali jika hasil turunan dari fungsi pada penyebutnya yang berbentuk akar berupa faktor yang sama dengan fungsi pada pembilangnya. Begitupun sebaliknya, hasil turunan dari fungsi pada pembilangnya yang berbentuk akar berupa faktor yang sama dengan fungsi pada penyebutnya.

B. *Saran*

Pembahasan yang dikaji dalam skripsi ini adalah bagaimana menentukan ciri-ciri spesifik metode penyelesaian limit fungsi aljabar pada bentuk tak tentu. Apabila dari pembaca ingin membahas lebih lanjut tentang topik yang serupa, maka disarankan untuk menggunakan fungsi yang lain diantaranya fungsi trigonometri. Karena disini hanya dibahas penyelesaian limit pada fungsi aljabar.

DAFTAR RUJUKAN

Artikel non-personal, 6 April 2013., Kalkulus, Wikipedia Bahasa Indonesia, http://id.wikipedia.org/wiki/Kalkulus, diakses pada 28 Agustus 2012

Artikel non-personal, 29 April 2013., Limit Fungsi, Wikipedia Bahasa Indonesia, Desember 2012

Baisuni, Hasyim. 2008. *Kalkulus.* Jakarta: Universitas Indonesia.

Briggs, L. William, dkk. 2011. *Calculus: International Edition.* Boston: Pearson Education.

Frank Ayres dan Elliot Mendelson. 2004. *Kalkulus: schaum's easy outlines*. Jakarta: Erlangga.

Gazali, Wikaria dan Soedadyatmodjo. 2007. *Kalkulus Edisi 2*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Himonas, Alex dan Alan Howard. 2003. *Calculus Ideas and Applications,* USA: John Wiley and Sons.

Howard Anton, dkk. 2010. *Calculus International Student Version, Late Transcendentals: Ninth Edition.* Hoboken: John Wiley and Sons.

Hughes Hallet, dkk. 2002. *Calculus Single Variable: Third Edition.* New York: National Science Foundation Grant.

Ida Lydiati. 2010. "*kalkulus1-limit*", **Error! Hyperlink reference not valid.** diakses pada 19 Agustus 2004

Irvan Habibali,"Limit fungsi", *irvanhabibali.files.wordpress.com/2009/06/limit-fungsi.doc,* terakhir diakses pada 7 juni 2009.

Leithold dan Hutahaean. 1986. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik Edisi Kelima: Jilid 1.* Jakarta: Erlangga.

Loomis Lynn. 1974. *Calculus.* Canada: Addison-Wesley Publishing Company.

Pardede, Jasman. 2010. *Kalkulus I.* Jakarta: Erlangga.

Purcell, J. Edwin dan Dale Varberg. 1984. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Keempat Jilid 2.* Jakarta: Erlangga.

Purcell, J. Edwin dan Dale Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Kelima Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Salas, dkk. 2003. *Calculus One Variable: Ninth Edition*. New York: John Wiley and Sons.

Siti Rahmatun. 2010. "Bab 7 Limit Fungsi", *http://www.google.com/ sitirahmatun. files. wordpress.com %terakhir-limit2.pdf,* terakhir diakses pada 6 februari 2009.

Stewart, James. 2001. *Kalkulus Edisi 4: Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.