TEKNOSAINS
MEDIA INFORMASI DAN TEKNOLOGI
Journal homepage: https://journal.uin-alauddin.ac.id/index.php/teknosains/

Pemodelan matematika model SIAT pada penyebaran penyakit HIV/AIDS di Sulawesi Selatan

Muh. Ibrahim[1], Irwan[1*], Hikmawati Pathuddin[1]
[1]Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar
Jl. Sultan Alauddin No. 63, Gowa, Sulawesi Selatan, Indonesia. 92113
*E-mail: irwan.msi@uin-alauddin.ac.id

Abstrak: HIV/AIDS merupakan salah satu penyakit menular yang masih menjadi masalah kesehatan utama di banyak wilayah, termasuk Sulawesi Selatan. Penelitian ini membahas tentang model *Susceptible Infected AIDS Treatment* (SIAT) penyakit HIV/AIDS di Sulawesi Selatan. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk membangun model penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan menggunakan model SIAT, menganalisis model dan simulasi untuk melihat dinamika kasus HIV/AIDS di Sulawesi Selatan. Langkah awal penelitian adalah membangun model SIAT penyakit HIV/AIDS, menentukan titik kesetimbangan dan menentukan nilai reproduksi dasar (R_0). Selanjutnya menganalisis kestabilan titik kesetimbangan kemudian menentukan nilai awal variabel dan nilai parameter. Terakhir, melakukan simulasi dan interpretasi hasil simulasi. Hasil pada penelitian ini diperoleh model matematika SIAT dalam bentuk sistem persamaan diferensial. Titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik penyakit yang keduanya bersifat stabil. Nilai bilangan reproduksi dasar (R_0) yang diperoleh <1, yang berarti penyakit akan menghilang dan tidak akan meluas pada suatu populasi. Hasil analisis menunjukkan bahwa kedua jenis kesetimbangan tersebut memiliki nilai eigen negatif sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik penyakit stabil.

Kata Kunci: HIV/AIDS, model SIAT, pemodelan matematika, reproduksi dasar, titik kesetimbangan

Abstract: HIV/AIDS is one of the infectious diseases that remains a major health issue in many regions, including South Sulawesi. This study discusses the Suceptible Infected AIDS Treatment (SIAT) model for HIV/AIDS in South Sulawesi. The purpose of this study was to build a model of the spread of HIV/AIDS using the SIAT model, analyze models and simulations to see the dynamics of HIV/AIDS cases in South Sulawesi. The initial step of the research was to build a SIAT model for HIV/AIDS, determine the equilibrium point and determine the basic reproductive value (R_0). Next, analyze the stability of the equilibrium point and then determine the initial variable values and parameter values. Lastly do the simulation and interpretation of the simulation results. The results of the this study were obtained by the SIAT mathematical model in the from of a system of differential equations, where both disease-free and disease-endemic equilibrium points are stable. The basic reproduction number (R_0) obtained is <1,which means thet the disease will disapper and will not spread to a population. The results of the analysis show that both types of equilibrium have negative eigenvalues so that it can be concluded that the disease-free and disease-endemic equilibrium points are stable.

Keywords: HIV/AIDS, SIAT model, mathematical modeling, basic reproduction, equilibrium point

PENDAHULUAN

Perkembangan dan kemajuan dunia modern tidak dapat dipisahkan dari matematika. Matematika memberikan perenan penting dalam berbagai bidang, bahkan telah banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari, seperti bisnis, ekonomi, sosial dan kesehatan. Dalam kesehatan, matematika dapat membantu dalam mengamati data

Cara Sitasi:
Ibrahim, N., Irwan, I., Pathuddin, H. (2024). Pemodelan matematika model SIAT pada penyebaran penyakit HIV/AIDS di Sulawesi Selatan. *Teknosains: Media Informasi dan Teknologi*, 18(2), 146-154. https://doi.org/10.24252/teknosains.v18i2.45723

Diajukan 16 Februari 2024; Ditinjau 29 April 2024; Diterima 17 Desember 2024; Diterbitkan 04 Januari 2025

menganalisis penyebaran penyakit. Salah satu ilmu matematika yang dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari adalah pemodelan matematika. Pemodelan matematika digunakan untuk menggambarkan secara terperinci fenomena dan problem dalam kehidupan nyata yang dibentuk kedalam sebuah persamaan sehingga lebih mudah untuk dipelajari dan diteliti. Salah satu fenomena yang dapat digambarkan adalah penyebaran penyakit menular dalam suatu populasi yang dapat dianalisis melalui model matematika.

Model matematika dibentuk berdasarkan asumsi-asumsi, model yang telah dibentuk kemudian akan dianalisa, agar model tersebut dapat mewakili permasalahan yang akan dibahas. *Human Immunodeficiensy Vyrus/Acquired Immunodeficiensy Syndrome* (HIV/AIDS) menjadi sebuah ancaman bagi bangsa Indonesia, khususnya bagi kalangan remaja yang merupakan generasi penerus bangsa. HIV/AIDS merupakan salah satu Penyakit Menular Seksual (PMS). HIV adalah jenis virus yang menyerang imun tubuh manusia, sedangkan AIDS adalah kumpulan gejala penyakit yang disebabkan oleh imun tubuh yang sangat lemah karena HIV. Kasus HIV baru terdapat 1.174 dan Penderita AIDS sebanyak 629 orang pada Tahun 2017. Jika dilihat dari 2011-2017 Kasus HIV menunjukkan peningkatan, tetapi menurun pada 2018. Sedangkan kasus AIDS mengalami peningkatan mulai tahun 2015 hingga 2017 dan menurun pada 2018, kemudian data kasus HIV 2019 meningkat lagi. Pada tahun 2020 kasus HIV menurun menjadi 1.210 dan AIDS menjadi 307 kasus. HIV ditularkan melalui kontak langsung dengan perantara seperti darah, sperma, ASI. Salah satu penyebab menularnya HIV/AIDS yaitu memiliki banyak pasangan seksual dan berhubungan badan, sedangkan perbuatan tersebut juga merupakan zina

Model epidemik telah banyak diteliti, diantaranya penelitian yang dilakukan oleh Leleury et al. (2020). Penelitian ini membahas tentang analisis stabilitas dan simulasi model penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan menggunakan model SIA (*Susceptible, Infected, Abstained*). Terdapat laju variabel individu rentan ke individu yang terinfeksi HIV kemudian individu terinfeksi AIDS. Penelitian yang lain dilakukan oleh Yudhi (2019), penelitian ini membahas mengenai model SITA pada penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan adanya terapi atau *treatment* dengan diasumsikan pada populasi tertutup. Berbeda dengan penelitian sebelumnya pada penelitian ini dibahas mengenai model SIAT pada penyebaran penyakit HIV/AIDS. Model SIAT mengasumsikan bahwa setelah terinfeksi AIDS akan ada proses *treatment* atau pengobatan. Penelitian yang lain dilakukan oleh Gurmu & Koya (2019) yang membahas tentang penyebaran HPV pada individu rentan dengan menggunakan model SITR dengan melihat dampak dari pengobatan kemoterapi terhadap yang terinfeksi.

Berdasarkan uraian latar belakang, dilakukan penelitian yang bertujuan untuk membangun model penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan menggunakan model SIAT, menganalisis model dan simulasi untuk melihat dinamika kasus HIV/AIDS di Sulawesi Selatan. Penelitian ini sangat penting bagi upaya pengendalian dan penanggulangan HIV/AIDS di Sulawesi Selatan. Dengan membangun model penyebaran penyakit menggunakan model SIAT, peneliti dapat menganalisis dinamika penyebaran HIV/AIDS secara lebih akurat dan menyeluruh. Model ini memungkinkan identifikasi faktor-faktor kunci yang memengaruhi penyebaran penyakit, serta penentuan titik kesetimbangan dan nilai reproduksi dasar (R_0). Hasil analisis dan simulasi dari model ini dapat digunakan oleh pembuat kebijakan dan praktisi kesehatan untuk merancang strategi intervensi yang lebih efektif dan efisien dalam mengurangi kasus HIV/AIDS. Selain itu, penelitian ini juga berkontribusi pada pengembangan ilmu pengetahuan di bidang epidemiologi dan pemodelan matematika penyakit menular, yang dapat diterapkan pada penyakit lainnya.

METODE PENELITIAN

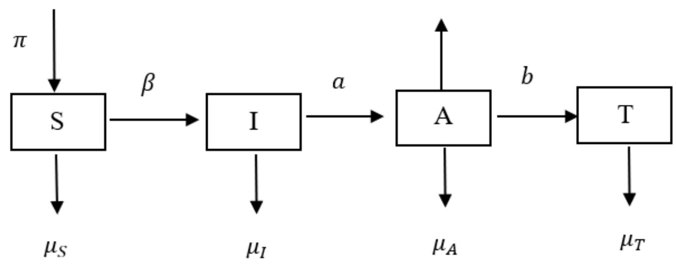
Jenis penelitian ini adalah penelitian terapan yang digunakan untuk mengkaji penyakit HIV/AIDS dengan jenis data adalah data sekunder dari Dinas Kesehatan Sulawesi Selatan dan Badan Pusat Statistika Sulawesi Selatan. Langkah pertama adalah membangun model matematika berdasarkan asumsi-asumsi yang berkaitan dengan model SIAT berdasarkan karakteristik penyakit, kemudian akan terbentuk diagram model yang membentuk persamaan differensial. Langkah selanjutnya yaitu, nilai reproduksi dasar lalu menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik dari model yang telah dibentuk sebelumnya dan menganalisis kestabilan titik kesetimbangan. Kemudian melakukan simulasi menggunakan program model SIAT dari nilai awal dan nilai parameter.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Langkah awal dalam memahami penyebaran HIV/AIDS di Sulawesi Selatan, dilakukan analisis menyeluruh terhadap data epidemiologis yang tersedia. Pendekatan matematis digunakan untuk memodelkan dinamika penyebaran penyakit ini, dengan tujuan memberikan gambaran yang lebih jelas mengenai faktor-faktor yang mempengaruhi penyebarannya dan efektivitas intervensi yang dapat diterapkan. Hasil dan pembahasan dalam penelitian ini akan berfokus pada pembentukan model SIAT (*Susceptible Infected AIDS Treatment*), analisis kestabilan titik kesetimbangan, serta simulasi yang dilakukan untuk menggambarkan dinamika kasus HIV/AIDS dalam populasi yang diteliti.

A. Membangun Model SIAT

Asumsi-asumsi yang digunakan untuk model penyebaran penyakit HIV/AIDS yaitu antara lain: (1) Populasi terbuka berarti terjadi perubahan populasi karena kelahiran dan kematian (migrasi dan emigrasi diabaikan); (2) Individu terinfeksi, karena adanya kontak langsung atau intraksi antara individu rentan dengan individu terinfeksi; (3) Individu yang telah bergejala penyakit disebabkan oleh HIV akan menjadi populasi A; (4) Terdapat kematian alami pada setiap populasi; dan (5) Individu pada populasi A akan melakukan *treatment*. Diagram model SIAT penyakit HIV/AIDS ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram alur model penyebaran penyakit HIV/AIDS

Berdasarkan asumsi dan Gambar 1 maka model matematika yang terbentuk yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \pi - (\beta \mathrm{I} - \mu)S$$
$$\frac{d\mathrm{I}}{dt} = \beta \mathrm{I} S - (a - \mu)\mathrm{I}$$
$$\frac{dA}{dt} = a\mathrm{I} - (b - \mu - c)A$$

$$\frac{dT}{dt} = bA - \mu T$$

Variabel dan parameter yang digunakan ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Parameter model SIAT untuk penyebaran penyakit HIV/AIDS

Variabel	Keterangan
S	Jumlah individu rentan
I	Jumlah individu yang telah terinfeksi HIV
A	Jumlah individu yang terinfeksi AIDS
T	Jumlah individu yang melakukan pengobatan
π	Laju kelahiran
β	Laju individu rentan ke individu *infected*
A	Laju individu terinfeksi HIV menjadi AIDS
b	Laju individu terinfeksi AIDS melakukan *treatment*
μ_S	Laju kematian alami *susceptible*
μ_I	Laju kematian alami *infected*
μ_A	Laju kematian alami AIDS
μ_T	Laju kematian alami *treatment*
c	Kematian karena penyakit AIDS

B. Analisis Model SIAT untuk Penyebaran Penyakit HIV/AIDS

1. Bilangan reproduksi dasar

Yang menentukan stabilitas penyebaran penyakit. Dalam mencari nilai (R_0) dari penyebaran penyakit HIV/AIDS menggunakan matriks *next generation* yang berdasar pada variabel I dan A. Berdasar persamaan variabel I dan A diperoleh:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \beta S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan}$$

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} (a+\mu) & 0 \\ -a & (b+\mu+c) \end{pmatrix}$$

Maka $G = \bar{F}\bar{V}^{-1}$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\beta S}{a+\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai reproduksi dasar adalah nilai eigen terbesar dari G dengan menggunakan rumus $|\lambda I - G| = 0$, sehingga diperoleh nilai $\lambda_1 = \frac{\beta S}{a+\mu}, \lambda_2 = 0$, sehingga diperoleh nilai reproduksi dasar yaitu $R_0 = \frac{\beta S}{a+\mu}$

2. Titik kesetimbangan

Titik kesetimbangan pada model SIAT akan terjadi pada saat $\left(\frac{dS}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dA}{dt}, \frac{dT}{dt}\right) = (0,0,0,0)$. Terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit atau E_0 dan titik kesetimbangan endemik atau E_1. Titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh dengan mengasumsikan $I = 0$ yang berarti tidak ada individu yang terinfeksi dan menularkan penyakit. Berdasarkan Persamaan (1) diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (S, I, A, T) = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0,0,0\right)$. Untuk mengetahui titik kesetimbangan endemik $E_1 = (S, I, A, T)$, dimana $E_1 = \left(\frac{a+\mu}{\beta}, \frac{\beta\pi-\mu(a+\mu)}{\beta(a+\mu)}, \frac{a\beta\pi-a\mu(a+\mu)}{\beta(a+\mu)(b+\mu+c)}, \frac{ab\beta\pi-ab\mu(a+\mu)}{\beta\mu(a+\mu)(b+\mu+c)}\right)$. Selain itu titik kesetimbangan endemik dapat dinyatakan dengan mensubstitusi nilai R_0, sehingga diperoleh $E_1 = \left(\frac{\pi}{\mu R_0}, \frac{\mu(R_0-1)}{\beta}, \frac{a\mu(R_0-1)}{\beta(b+\mu+c)}, \frac{ba(R_0-1)}{\beta(b+\mu+c)}\right)$

3. Analisis kestabilan titik kesetimbangan

Kestabilan titik kesetimbangan diperoleh dengan melakukan linearisasi pada Persamaan (1) sehingga diperoleh Matriks Jacobian untuk kesetimbangan bebas penyakit.

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta\pi}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta\pi}{\mu} - (a+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & a & -(b+\mu+c) & 0 \\ 0 & 0 & b & -\mu \end{bmatrix}$$

Untuk mengetahui kestabilan E_0 dengan langkah mencari nilai eigen dari matriks JE_0 menggunakan rumus $|\lambda I - JE_0| = 0$ diperoleh:

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta\pi}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta\pi}{\mu} - (a+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & a & -(b+\mu+c) & 0 \\ 0 & 0 & b & -\mu \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda+\mu & \frac{\beta\pi}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{\beta\pi}{\mu} + (a+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & -a & \lambda+b+\mu+c & 0 \\ 0 & 0 & -b & \lambda+\mu \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan Metode Sarrus diperoleh nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dan λ_4 bernilai negatif sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil. Selanjutnya mencari titik kesetimbagan endemik.

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\left(\beta\frac{\mu(R_0-1)}{\beta} + \mu\right) & -\beta\frac{\pi}{\mu R_0} & 0 & 0 \\ \beta\frac{\mu(R_0-1)}{\beta} & \beta\frac{\pi}{\mu R_0} - (a+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a\mu(R_0-1)}{\beta(b+\mu+c)} & -(b+\mu+c) & 0 \\ 0 & 0 & b & -\mu \end{bmatrix}$$

Untuk mengetahui kestabilan E_1 dengan langkah mencari nilai eigen dari matriks JE_1 menggunakan rumus $|\lambda I - JE_1| = 0$ diperoleh:

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\left(\beta \dfrac{\mu(R_0-1)}{\beta} + \mu\right) & -\beta \dfrac{\pi}{\mu R_0} & 0 & 0 \\ \beta \dfrac{\mu(R_0-1)}{\beta} & \beta \dfrac{\pi}{\mu R_0} - (a+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a\mu(R_0-1)}{\beta(b+\mu+c)} & -(b+\mu+c) & 0 \\ 0 & 0 & b & -\mu \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda + \left(\beta \dfrac{\mu(R_0-1)}{\beta} + \mu\right) & -\beta \dfrac{\pi}{\mu R_0} & 0 & 0 \\ \beta \dfrac{\mu(R_0-1)}{\beta} & \lambda - \beta \dfrac{\pi}{\mu R_0} - (a+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a\mu(R_0-1)}{\beta(b+\mu+c)} & \lambda + (b+\mu+c) & 0 \\ 0 & 0 & b & \lambda + \mu \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Metode Sarrus diperoleh nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dan λ_4 bernilai negatif sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil.

4. Simulasi model
   Nilai awal untuk setiap variabel ditunjukkan pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai awal setiap variabel

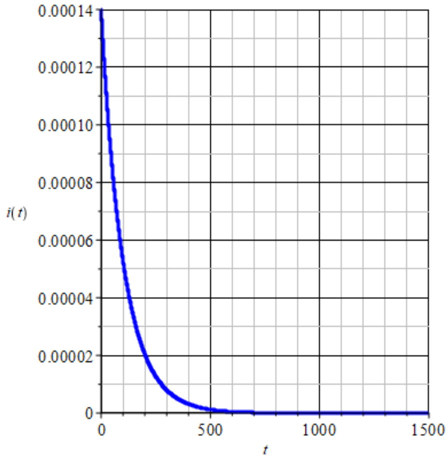
Variabel	Nilai	Sumber
S	0,9998	Dinas Kesehatan
I	0,0001	Dinas Kesehatan
A	0,0000358	Dinas Kesehatan
T	0,000014	Dinas Kesehatan

Simulasi menggunakan nilai parameter yang ditunjukkan pada Tabel 3.

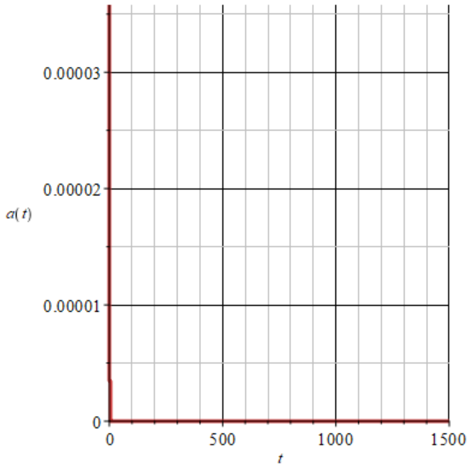
Tabel 3: Nilai untuk setiap parameter

Parameter	Nilai	Sumber
$\boldsymbol{\pi}$	0,066841661	Dinas Kesehatan
$\boldsymbol{\beta}$	$\beta_1 = 0,0001$ $\beta_2 = 0,01$	Data Asumsi
$\boldsymbol{a}$	0,000035835	Dinas Kesehatan
$\boldsymbol{b}$	0,4	Data Asumsi
μ	0,01	Dinas Kesehatan
$\boldsymbol{c}$	0,47	Data Asumsi

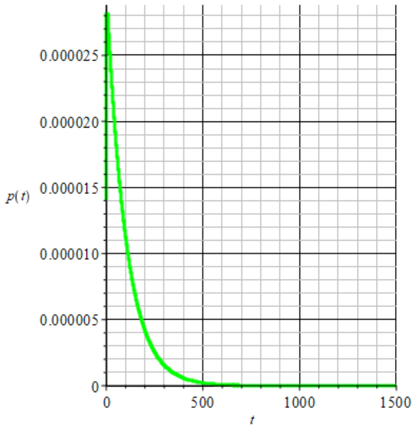
Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3 diperoleh nilai $R_0 = 0.6660288964 < 1$, yang berarti individu yang terinfeksi HIV/AIDS tidak akan menularkan ke individu lain. Dari hasil simulasi menggunakan aplikasi Maple diperoleh Grafik yang ditunjukkan pada Gambar 2-Gambar 8.



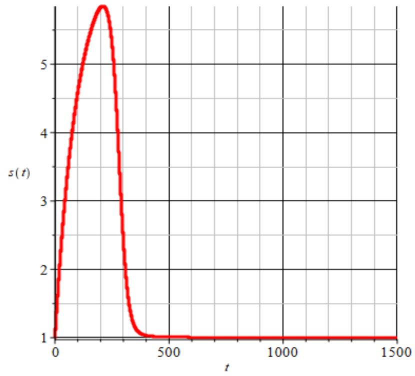
Gambar 2 Proporsi populasi *infected* pada saat waktu (T) 10%, 50%, 90%



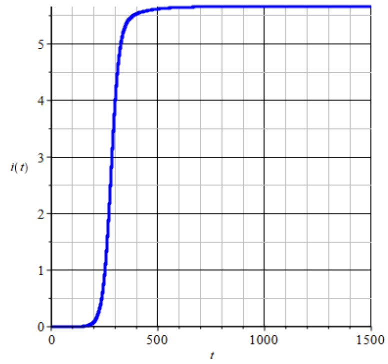
Gambar 3. Proporsi populasi AIDS pada saat waktu (T) 10%, 50%, 90%



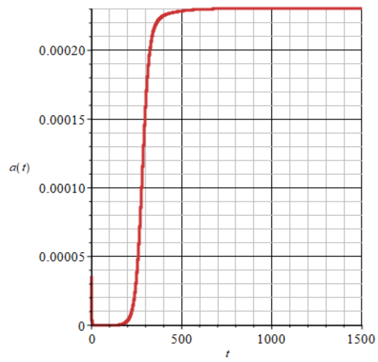
Gambar 4. Proporsi populasi *treatment* pada saat waktu (T) 10%, 50%, 90%



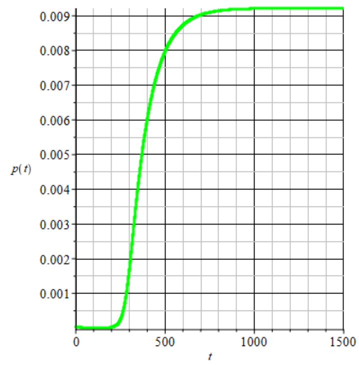
Gambar 5. Proporsi populasi *susceptible* pada saat waktu (T) 10%, 50%, 90%



Gambar 6. Proporsi populasi *infected* pada saat waktu (T) 10%, 50%, 90%



Gambar 7. Proporsi populasi AIDS pada saat waktu (T) 10%, 50%, 90%



Gambar 8. Proporsi populasi *treatment* pada saat waktu (T) 10%, 50%, 90%

Berdasarkan pemodelan matematika yang telah dilakukan menunjukkan bahwa variabel-variabel seperti jumlah individu rentan, jumlah individu yang terinfeksi HIV, jumlah individu yang terinfeksi AIDS, jumlah individu yang melakukan pengobatan, serta laju kelahiran dan kematian sangat berpengaruh terhadap dinamika penyebaran HIV/AIDS di Sulawesi Selatan. Dengan menggunakan data proporsi populasi pada berbagai waktu (T), seperti 10%, 50%, dan 90%, model ini mampu memberikan gambaran yang komprehensif tentang bagaimana intervensi yang tepat dapat mengendalikan penyebaran penyakit ini. Penelitian ini tidak hanya membantu dalam memahami kondisi epidemiologi yang ada, tetapi juga menyediakan landasan bagi perencanaan strategi kesehatan yang lebih efektif dan terukur.

KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa model penyebaran penyakit HIV/AIDS menggunakan Model SIAT yaitu:

$$\frac{dS}{dt} = \pi - (\beta \mathrm{I} - \mu)S$$
$$\frac{d\mathrm{I}}{dt} = \beta \mathrm{I}S - (a - \mu)\mathrm{I}$$
$$\frac{dA}{dt} = a\mathrm{I} - (b - \mu - c)A$$
$$\frac{dT}{dt} = bA - \mu T$$

Titik kesetimbangan dari model penyebaran penyakit HIV/AIDS di Provinsi Sulawesi Selatan yaitu meliputi: (a) Titik kesetimbangan bebas penyakit $E = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0,0,0\right)$ dan (b) Titik kesetimbangan endemik penyakit $E_1 = \left(\frac{a+\mu}{\beta}, \frac{\beta\pi-\mu(a+\mu)}{\beta(a+\mu)}, \frac{a\beta\pi-a\mu(a+\mu)}{\beta(a+\mu)(b+\mu+c)}, \frac{ab\beta\pi-ab\mu(a+\mu)}{\beta\mu(a+\mu)(b+\mu+c)}\right)$, serta Titik kesetimbangan endemik penyakit setelah disubstitusi nilai reproduksi dasar (R_0) $E_1 = \left(\frac{\pi}{\mu R_0}, \frac{\mu(R_0-1)}{\beta}, \frac{a\mu(R_0-1)}{\beta(b+\mu+c)}, \frac{ba(R_0-1)}{\beta(b+\mu+c)}\right)$.

DAFTAR PUSTAKA

Handayani, H. (2018). Waspada epidemi HIV-AIDS di Indonesia. *Medical and Health Science Journal*, 1(1), 1–8. https://doi.org/10.33086/mhsj.v1i1.610.

Barnes, B., & Fulford, G. R. (2009). *Mathematical Modelling with Case Studies A Differential Equations Approach Using Maple and Matlab*. New York: Taylor and Francis.

Gurmu, E. D., & Koya, P. R. (2019). *Impact of Chemotherapy treatment on SITR Compartmentalization and Modeling of Human Papilloma Virus*. *IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM),* 15(3), 17–29. https://doi.org/10.9790/5728-1503011729.

Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2013). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Oxford: Academic Press.

Kurniawati, I. (2019). Profil pemodelan matematika siswa SMP dalam menyelesaikan masalah pada materi fungsi linear. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 8(2), 174-180.

Leleury, Z. A., Rumlawang, F. Y., & Naraha, A. G. (2020). Analisis stabilitas dan simulasi model penyebaran penyakit HIV/AIDS tipe SIA (*Susceptible, Infected, Abstained*). *TENSOR: Pure and Applied Mathematics Journal*, 1(1), 31–40. https://doi.org/10.30598/tensorvol1iss1pp31-40.

Olsder, G. (1994). *Mathematical System Theory*. Belanda: Delft University of Technology.

Perko, P. (2001). *Differential Equation and Dynamical System*. New York: Springer.

van den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1–2), 29–48. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6.

Weissten, E. (2004). *Wolfram Mathword*. 31 Desember 2021. http://mathwold.wolfram.com/jacobian.html.

Yudhi, F. H. E. N. (2019). Analisis dampak program terapi HIV-AIDS pada model penyebaran penyakit HIV-AIDS dengan populasi terbuka. *Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 9(1), 1–10. https://doi.org/10.26418/bbimst.v9i1.37972.

Zwillinger, D. (2014). *Table of Integrals, Series, and Products: Eighth Edition*. United States: Academic Press.