TRANFORMASI MATRIKS PADA RUANG BARISAN KONVERGEN

Wahidah Alwi
Dosen pada Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Alauddin Makassar
Email. Tekno_sains@yahoo.com

Abstract: *The calculus have introduce the real functions namely for all functions to map real number to the real number. Now, the explanation it not only to real number but the mapping of norm space that is a linier transformations, namely the mathematical sentences with the mapping of a vector space to the others. The purpose of this research are how to know the requirements a infinite matrices in order to be a like as transformations in the sequences space is the sequences space c_0 to c_0. Matrices $A_{n \times m}$ can be looked as linier transformation of R^m to R^n. So the functions can map to point $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$ at R^m to a point $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ at R^n. The similarly, a matrices can be looked as linier transformation of the sequences space to the others provided that line and coloum matrices that infinite elements. In this case, matrices map the sequences $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ to the sequences $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$. This matrices is a infinite matrices. There for, the infinite matricres must fulfill several requirements in order be linier transformations of the sequences space to the certain sequences space, that is the infinite matrices $A = (a_{nk})_{n\geq 1}$ (k certain) with a finite suprimum can be linier transformation of the sequences c_0 to c_0.*

Key Words*: The matrices of transformation, Banach space, Hilbert space, the sequences space c_0 to c_0.*

PENDAHULUAN

Transformasi linear merupakan salah satu bagian dari matematika yang penting, khususnya transformasi matriks yang mempunyai banyak penerapan dalam memecahkan persoalan-persoalan fisika, bidang teknik, ilmu sosial, dan berbagai cabang matematika lainnya. Hal ini disebabkan begitu banyaknya model matematika yang terbentuk dari bidang tersebut. Telah diketahui bahwa matriks $A_{n \times m}$ dapat dipandang sebagai transformasi linear dari R^m ke R^n. Jadi ia memetakan titik $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ di R^m ke suatu titik $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ di R^n. Dengan jalan pikiran serupa kita dapat memandang matriks sebagai transformasi linear dari suatu ruang barisan ke ruang barisan lain asalkan baris dan kolom matriks tersebut tak hingga banyaknya. Dalam hal ini matriks memetakan barisan $(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ ke barisan $(y_1, y_2, y_3 \ldots)$. Matriks seperti ini disebut matriks tak hingga.

Misalkan A = (a_{nk}), n, k = 1, 2 … adalah matriks tak hingga dimana X dan Y ruang barisan, maka kita dapat menghubungkan A dengan suatu transformasi $T_A = X \to Y$, jika x = $(x_k) \in X$ oleh T_A dikawankan dengan Ax $\in$ Y, maka

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} \in Y.$$

Oleh karena itu secara formal barisan x dipetakan ke barisan Ax dimana $(Ax)_n \equiv A_n(x)$ diberikan oleh,

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \text{ , asalkan } A_n(x) \text{ konvergen untuk setiap n.}$$

Jadi barisan $(A_1(x), A_2(x), \dots) \in Y$ adalah peta barisan $(x_1, x_2, \dots)$ dibawah transformasi T_A. Matriks tak berhingga tersebut harus memenuhi beberapa syarat agar dapat menjadi transfornasi linear dari suatu ruang barisan ke ruang barisan tertentu.

Berangkat dari latar belakang tersebut penulis mencoba untuk menuangkannya dalam bentuk karya tulis ilmiah dengan judul *Transformasi Matriks Pada Ruang Barisan Konvergen.*

Tinjauan Pustaka

Ruang Vektor

Obyek utama tentang vektor adalah vektor-vektor dapat dijumlahkan dan menghasilkan vektor, dan dikalikan dengan suatu bilangan menghasilkan vektor lagi. Sebarang himpunan obyek dengan sifat seperti ini disebut "ruang vektor". Pada bagian ini semua anggota himpunan bilangan kompleks ¢ dipandang sebagai "skalar".

Sebelum mendefinisikan ruang vektor V atas ¢ maka ada dua operasi yang harus diperhatikan yaitu:

1. Operasi tambah di dalam himpunan V. Maksudnya adalah jika a, b $\in$ V, maka (a + b) juga di V. Dalam hal ini, V harus tertutup terhadap operasi tambah.
2. Operasi perkalian "skalar" antara anggota – anggota himpunan ¢ dengan anggota – anggota himpunan V. Maksudnya adalah jika $\alpha \in$ ¢ dan a $\in$ V maka α juga di V.

Definisi 2.1.1 (Berberian, 1961:3)

Ruang vektor V atas ¢ adalah himpunan obyek – obyek x, y, z, … disebut vektor. Vektor nol dinotasikan dengan θ, untuk setiap vektor x, negatif dari x dinotasikan dengan –x. Aksioma – aksioma berikut diasumsikan berlaku:

(A) Untuk setiap pasangan vektor x, y di V terdapat vektor yang disebut "jumlah x dan y", dinotasikan x + y di V, dan berlaku:

(A1) x + y = y + x untuk setiap x, y $\in$ V

(A2) x + (y + z) = (x + y) + z untuk setiap x, y, z$\in$ V

(A3) Terdapat dengan tunggal $\theta \in$ V sedemikian sehingga x + θ = x untuk setiap x $\in$ V

(A4) Untuk setiap $x \in V$, terdapat dengan tunggal $-x \in V$ yang disebut negatif x sedemikian sehingga $x + (-x) = \theta$

(M) Untuk setiap skalar λ dan setiap vektor x di V, terdapat vektor disebut "hasil kali x dengan λ", dinotasikan dengan λx di V, dan berlaku:

(M1) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ untuk setiap $x, y \in V$ dan λ adalah skalar

(M2) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ untuk setiap $x \in V$ dan λ, μ adalah skalar

(M3) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ untuk setiap $x \in V$ dan λ, μ adalah skalar

(M4) $1 . x = x$ untuk setiap $x \in V$

Sebagai catatan, $x + (-y)$ biasa ditulis dengan $x - y$.

Teorema 2.1.2 (Berberian, 1961: 6)

Untuk sebarang ruang vektor:

(i) Persamaan vektor $x + y = z$ mempunyai satu dan hanya satu penyelesaian x

(ii) Jika $z + z = z$ maka $z = \theta$

(iii) $\lambda\theta = \theta$ untuk setiap skalar λ

(iv) $0x = \theta$ untuk setiap vektor x

(v) Jika $\lambda x = \theta$ maka $\lambda = 0$ atau $x = \theta$

Akibat 2.1.3 (Berberian, 1961:7)

Untuk sebarang ruang vektor V berlaku:

(i). $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -(\lambda x)$

(ii). $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$

(iii). $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$

Ruang Banach

Struktur matematika yang akan didefinisikan adalah ruang Banach. Secara gamblang ruang Banach diartikan ruang vektor real/kompleks *bernorma* dan *lengkap* (terhadap norma tersebut).

Definisi 2.2.1

Ruang vektor V dikatakan "bernorma" jika terdapat fungsi bernilai riil pada $\| . \| : V \to R$ dengan sifat-sifat sebagai berikut:

1. $\|a\| \geq 0$ untuk setiap $a \in V$
   $\|a\| = 0$ jika dan hanya jika $a = \theta$
2. $\|\alpha a\| = |\alpha| \, \|a\|$ untuk setiap $\alpha \in R$, $a \in V$
3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ untuk setiap $a, b \in V$

Sebarang himpunan tak kosong X, disebut *ruang metrik*, jika untuk setiap pasangan $(a,b) \in X \times X$ didefinisikan bilangan riil $d(a,b)$ memenuhi:

(i). $d(a,b) \geq 0$
$d(a,b) = 0$ jika dan hanya jika $a = b$

(ii). $d(a,b) = d(b,a)$

(iii). $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$ untuk setiap $c \in X$

Jika V ruang vektor bernorma (ruang bernorma), maka fungsi d dengan d(a,b) = ||a – b|| memenuhi sifat-sifat metrik (i), (ii), (iii) tersebut di atas. Ini berarti setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik terhadap metrik d, dengan, d(a,b) = ||a – b||.

Jika untuk setiap sebarang barisan Cauchy (x_n) di dalam ruang metrik X terdapat $x \in X$ sehingga $d(x,x_n) \to 0$, maka ruang metrik X dikatakan *"lengkap"*.

Sekarang akan didefinisikan ruang *Banach* sebagai berikut:

Definisi 2.2.2

Ruang vektor bernorma V disebut ruang Banach jika V lengkap di dalam ruang metrik yang didefinisikan oleh norma.

Definisi 2.2.2 menyatakan bahwa ruang vektor bernorma V dikatakan lengkap jika terhadap norma || . || dengan d(a,b) = ||a – b||, V merupakan ruang metrik lengkap, yaitu jika untuk setiap barisan Cauchy (x_n) di dalam V (yaitu dengan sifat $\|x_n - x_m\| \to 0$), terdapat $x \in V$ sehingga $\|x - x_n\| \to 0$.

Ruang Hilbert

Konjugate dari bilangan kompleks λ akan dinotasikan dengan λ^*. Jadi, jika $\lambda = \alpha + i\beta$, α dan β bilangan reall, maka $\lambda^* = \alpha - i\beta$. Sifat-sifat dari konjugate adalah $(\lambda^*)^* = \lambda$, $(\lambda + \mu)^* = \lambda^* + \mu^*$, $(\lambda\mu)^* = \lambda^* \mu^*$, $|\lambda| = \sqrt{\lambda^*\lambda}$, dan $\lambda^* = \lambda$ jika dan hanya jika λ bilangan real.

Definisi 2.3.1

Diberikan ruang vektor V atas field ¢ yaitu:

a. Fungsi $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to$ ¢ dikatakan inner product bila memenuhi:

   (I_1). $\langle x, y\rangle^* = \langle y,x\rangle$ (tanda * dinotasikan sebagai konyugate)

   (I_2). $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ jika x dan $y \in V$ dan α adalah skalar

   (I_3). $\langle x + y,z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y,z\rangle$ jika x, y dan $z \in V$

   (I_4). $\langle x, x\rangle \geq 0$ untuk setiap $x \in V$ dan $\langle x, x\rangle = 0$ hanya jika $x = \theta$.

b. Ruang vektor V yang diperlengkapi dengan inner product dinamakan ruang inner product atau ruang Pre-Hilbert.

Teorema 2.3.2 (Berberian, 1961:27)

Dalam sebarang ruang Pre-Hilbert berlaku:

(1). $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

(2). $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda^*\langle x, y\rangle$

(3). $\langle \theta, y\rangle = \langle x, \theta\rangle = 0$

(4). $\langle x - y,z \rangle = \langle x, z\rangle - \langle y,z\rangle$

$\langle x, y - z \rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, z\rangle$

(5). Jika $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ untuk setiap z, maka x =y.

Teorema 2.3.3 (Berberian, 1961:30)

1. **Ketaksamaan Cauchy – Schwarz**

   Dalam sebarang ruang Pre – Hilbert,

   $$|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \, \|y\| .$$

Teorema 2.3.4 (Berberian, 1961:30)

2. **Ketaksamaan Segitiga**

   Di dalam sebarang ruang Pre – Hilbert,

   $$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

Dari sifat-sifat sederhana di atas, mudah ditunjukkan bahwa setiap ruang Pre-Hilbert V merupakan ruang bernorma , sebab jika didefinisikan $\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ untuk setiap $x \in V$ maka $\| . \|$ memenuhi sifat:

a). $\| x \| \ge 0 \ \forall x \in V$

$\| x \| = 0$ jika dan hanya jika $x = \theta$

b). $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \ \forall x \in V$

c). $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in V$

Definisi 2.3.5

Ruang Pre-Hilbert dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy (x_n) di dalam X, konvergen di dalam X

Definisi 2.3.6 (Berberian, 1961:40)

Ruang Pre-Hilbert (inner product) yang lengkap dinamakan ruang Hilbert.

Ruang Barisan Klasik

Definisi 2.4.1 Ruang Barisan Klasik c_0

Ruang barisan klasik c_0 adalah koleksi dari semua barisan bilangan riil konvergen ke nol dan ditulis,

$$c_0 = \{x = (x_k) : x_k \to 0\}$$

untuk setiap $x \in c_0$, didefinisikan norma c_0 sebagai berikut:

$$\| x \| = \sup_{n\ge1}\{|x_k|\}$$

Definisi 2.4.2 Ruang Barisan Klasik c

Ruang barisan klasik c adalah koleksi dari semua barisan bilangan riil konvergen dan ditulis,

$$c = \{x = (x_k) : x_k \text{ konvergen}\}$$

untuk setiap $x \in c$, didefinisikan norma c sebagai berikut:

$$\| x \| = \sup_{n\ge1}\{|x_k|\}$$

TUJUAN PENELITIAN

Tujuan penelitian ini untuk mengetahui syarat-syarat dari suatu matriks takhingga sehingga dapat menjadi transfornasi linear dari suatu ruang barisan ke ruang barisan tertentu yaitu ruang barisan c_0 ke c_0.

PEMBAHASAN

Transformasi Matriks Pada Ruang Barisan

Transformasi matriks yang dibahas dalam penelitian ini adalah transformasi matriks tak hingga yang memetakan suatu ruang barisan ke ruang barisan lain. Misalkan A = (a_{nk}), n, k = 1, 2 … adalah matriks tak hingga dimana V dan W ruang barisan, maka kita dapat menghubungkan A dengan suatu transformasi $T_A = V \to W$. Jika x = (x_n) $\in$ V dipetakan ke y = (y_n) = (A_n(x)) $\in$ W, maka

$$Ax = (A_n(x))_{n\geq 1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{matrix} \to A_1 \\ \to A_2 \\ \to \ldots \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(x) \\ A_2(x) \\ \ldots \end{pmatrix} \in W.$$

Oleh karena itu secara formal barisan x dipetakan ke barisan Ax dimana $(Ax)_n \equiv A_n(x)$ diberikan oleh,

$$A_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k\right)_{n\geq 1}$$, asalkan $A_n(x)$ konvergen untuk setiap n.

Jika A = (a_{nk}) matriks tak hingga dari V dan W dimana V dan W masing-masing ruang barisan, maka A liniear sebab jika x = (x_k), y = (y_k) $\in$ V dan $\alpha \in$ R berlaku:

$$A(x + y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(x_k + y_k)\right)_{n\geq 1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k\right)_{n\geq 1} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} y_k\right)_{n\geq 1} = A(x) + A(y)$$

$$A(\alpha x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(\alpha x_k)\right)_{n\geq 1} = \alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k\right)_{n\geq 1} = \alpha A(x).$$

Teorema Utama

Teorema utama yang akan dibuktikan dalam penelitian ini dikembangkan dari suatu hasil sederhana transformasi matriks A = (a_{nk}) dengan sifat $\sup_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|\right) < \infty$. Akan ditunjukkan bahwa dengan penambahan satu atau beberapa syarat terhadap matriks di atas, matriks-matriks seperti ini dapat menjadi transformasi linear baik dari c_0 ke c_0 maupun c ke c.

Dimisalkan A = (a_{nk}) matriks tak hingga dan M = $\sup_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\right) < \infty$, maka untuk sebarang barisan x = (x_k) berlaku:

$$|A_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, x_k\right| = \sum_{k=1}^{m}|a_{nk}||x_k| + \sum_{k=m+1}^{\infty}|a_{nk}||x_k|$$

$$\leq \|x\| \sum_{k=1}^{m}|a_{nk}| + M\left(\max_{k\geq m+1}|x_k|\right) \qquad (*)$$

untuk suatu m yang cukup besar.

Dari (*) terlihat bahwa:

1. $\|x\| \sum_{k=1}^{m}|a_{nk}|$ konvergen ke nol bilamana $(a_{nk})_{n\geq 1}$ konvergen ke nol untuk setiap k.
2. Jika (x_k) konvergen ke nol maka M ($\max_{k\geq m+1}|x_k|$) konvergen ke nol.

Ini berarti jika matriks (a_{nk}) di atas bersifat $(a_{nk})_{n\geq 1}$ konvergen ke nol untuk setiap k maka matriks tersebut memetakan barisan konvergen ke nol ke barisan konvergen ke nol lagi.

Matriks yang memetakan c_0 ke c_0

Teorema 4.2.1

Diketahui A = (a_{nk}) matriks tak hingga, $(a_{nk})_{n\geq 1} \to 0$ (k tertentu) dan,

$$M = \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\right) < \infty,$$

suprimum diambil di atas semua jumlahan atas k untuk setiap n maka A memetakan c_0 ke c_0, ditulis A $\in$ (c_0, c_0).

Bukti:

Misalkan x $\in$ c_0 dan $\varepsilon > 0$. Berdasarkan (1), untuk setiap n berlaku:

$|A_n(x)| \leq \|x\| \sum_{k=1}^{m}|a_{nk}| + M\left(\max_{k\geq m+1}|x_k|\right)$ untuk suatu m yang cukup besar.

Karena x = (x_k) konvergen ke nol maka dapat dipilih m yang cukup besar sehingga $\max_{k\geq m+1}|x_k| < \varepsilon$. Untuk setiap n berlaku:

$$|A(x)| \leq \|x\| \left(\sum_{k=1}^{m}|a_{nk}|\right) + \varepsilon .$$

Karena $\left(\sum_{k=1}^{m}|a_{nk}|\right)_{n\geq 1} \to 0$ maka untuk n yang cukup besar berlaku $\|x\| \left(\sum_{k=1}^{m}|a_{nk}|\right) < \varepsilon$. Dengan demikian $|A_n(x)| < 2\varepsilon$ untuk n yang cukup besar.

Sehingga $\left(\left|A_n(x)\right|\right)_{n\geq 1} \to 0$ dalam hal ini $(A_n(x)) \to 0$. Kesimpulannya $x \in c_0$ maka $A_n(x) \in c_0$ artinya $A \in (c_0, c_0)$.

Berikut ini diberikan contoh matriks tak hingga yang memetakan c_0 ke c_0 dan memenuhi syarat-syarat pada Teorema 4.2.1. Matriks tak hingga berikut memetakan barisan $x = (x_k) \in c_0$ ke $y = (y_k) \in c_0$.

Contoh:

Diberikan matriks tak hingga $A = (a_{nk})$, n, k = 1, 2, …, maka kita dapat menghubungkan A dengan suatu transformasi $T_A = c_0 \to c_0$, jika $x = (x_n) = \left(\frac{1}{n}\right) \in c_0$ oleh T_A dikawankan dengan $Ax \in c_0$ dimana c_0 adalah ruang barisan yang konvergen ke nol, maka

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} \\ \dots \end{pmatrix} \in c_0 .$$

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right).$$

Oleh karena itu secara formal barisan x dipetakan ke barisan Ax dimana $(Ax)_n \equiv A_n(x)$ yang diberikan oleh,

$$A_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \text{, asalkan } A_n(x) \text{ konvergen untuk setiap n.}$$

Contoh:

Diberikan matriks tak hingga $A = (a_{nk})$, n, k = 1, 2, …, maka kita dapat menghubungkan A dengan suatu transformasi $T_A = c_0 \to c_0$, jika $x = (x_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right) \in c_0$ oleh T_A dikawankan dengan $Ax \in c_0$ dimana c_0 adalah ruang barisan yang konvergen ke nol, maka

$$Ax = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2^2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{2^3} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{2^4} \\ \frac{1}{2^6} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4^2} \\ \frac{1}{4^3} \\ \dots \end{pmatrix} \in c_0 .$$

$$y_n = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots\right).$$

Oleh karena itu secara formal barisan x dipetakan ke barisan Ax dimana $(Ax)_n \equiv A_n(x)$ yang diberikan oleh,

$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} < \infty$, asalkan $A_n(x)$ konvergen untuk setiap n.

PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan tujuan penelitian ini yaitu untuk mengetahui syarat-syarat dari suatu matriks takhingga sehingga dapat menjadi transfornasi linear dari suatu ruang barisan ke ruang barisan tertentu atau dari ruang barisan c_0 ke c_0, maka diperoleh beberapa syarat yang harus dipenuhi oleh matriks tak hingga tersebut yaitu matriks tak hingga $A = (a_{nk})_{n\geq 1}$ haruslah konvergen ke 0 (k tertentu), dan memenuhi sifat $\sup_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\right) < \infty$.

DAFTAR RUJUKAN

Anton, Howard. 1998. *Aljabar Linear Elementer*. Erlangga, Jakarta.

Bartle, G. Robert. 1982. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons. Inc, New York

Berberian.K, Sterling. 1961. *Introduktion to Hilbert Space*. Oxpord University Press, New York

Echols, John. M dan Hassan Shadily. 1975. *Kamus Inggris Indonesia*. PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta

Klambauer, Gabriel. 1973. *Real Analysis*. American Elseviser Publishing Company, Inc, New York.

Maddox, I. J. 1970. *Element of Functional Analisis*. Cambridge at The University Press.

P. Y. Lee. *Zeller Theory And Classical Sequence Spaces.* National University of Singapore, Singapore.

Randolph. F, John. 1968. *Basic Riil and Abstract Analisis*. Academic Press, New York and London.

Rudin, Walter. 1986. *Riil and Complex Analisis*. Mc Graw-Hill International Edition, New York.

Sukarjono. 2000. *Aljabar Linear dan Penerapannya*. Universitas Negeri Yogyakarta, Yokyakarta.